高等数学

习题解析（上）

徐乃楠　许静波　主　编
柳长青　杜奕秋　副主编

清华大学出版社

高等数学习题解析

(上)

徐乃楠　许静波　主　编
柳长青　杜奕秋　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等院校数学课程《高等数学(上)》(ISBN：978-7-302-47529-3)一书相配套的习题解析。本书严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析．上 / 徐乃楠，许静波 主编．—北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-47810-2

Ⅰ．①高… Ⅱ．①徐… ②许… Ⅲ．①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ．①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168952 号

责任编辑：王 定 程 琪

封面设计：周晓亮

版式设计：思创景点

责任校对：曹 阳

责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社

网 址：http：//www.tup.com.cn，http：//www.wqbook.com

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编：**100084

社 总 机：010-62770175 **邮 购：**010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京密云胶印厂

经 销：全国新华书店

开 本：185mm×260mm **印 张：**11.75 **字 数：**256 千字

版 次：2018 年 1 月第 1 版 **印 次：**2018 年 1 月第 1 次印刷

印 数：1～3000

定 价：45.00 元

产品编号：071021-01

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00 元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00 元

本书是高等院校数学课程《高等数学（上）》（ISBN：978-7-302-47529-3）一书相配套的习题解析，严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课程“高等数学”的学习辅助材料，以及其他数学教育工作者的参考资料。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017 年 8 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　函　　数

1.1.1　知识点概况

1. 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中，x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为这个函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$；函数值 $f(x)$的全体组成的集合称为 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y: y=f(x), x\in D\}$.

2. 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$中的每一个值 y，在 D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$.

3. 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则由 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$ 确定的函数，称为由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$所构成的复合函数，记为 $f\circ g$，即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$. 它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

4. 给定两个函数 $f(x)$，$x\in D_f$ 和 $g(x)$，$x\in D_g$. 记 $D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，我们定义这两个函数的下列运算：

和(差)$f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商$\frac{f}{g}$：$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D-\{x: g(x)=0, x\in D\}$.

5.(1) 常值函数：$y=C$，C 为常数；

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$，$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数；

(3) 指数函数：$y=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq1$；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$，$a>0$ 且 $a\neq1$，特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$；

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这六类函数称为基本初等函数.

6. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的函数，称为初等函数.

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

若存在数 M_1，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有上界函数，称 M_1 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在数 M_2，使得对任一 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的有下界函数，称 M_2 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

若存在 $M>0$，使得对任一 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，$f(x)$ 是 D 上的有界函数. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，此时也就是说对任何 $G>0$，总存在 $x\in D$，使得 $|f(x)|>G$.

8. $f(x)$ 在 D 上有界等价于 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

9. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 D 上.

如果对任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 是 D 上的增函数.

如果对任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么称 $f(x)$ 是 D 上的减函数.

增函数与减函数统称为单调函数.

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数. 奇函数的图形关于原点对称.

若对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

11. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期 . 通常我们说周期是指最小正周期.

1.1.2 习题解答

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2018x-1}$；

解 由 $2018x-1\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=\left[\frac{1}{2018},+\infty\right)$.

(2) $y=\frac{1}{4-x^2}$；

解 由 $4-x^2\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$；

解　由 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

解　由 $1-x^2>0$ 得函数的定义域 $D=(-1,1)$.

(5) $y=\cos\sqrt{x}$;

解　由 $x\geqslant 0$ 得函数的定义域 $D=[0,+\infty)$.

(6) $y=\tan(x-1)$;

解　由 $x-1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$得函数的定义域 $D=\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(7) $y=\arcsin(x-1)$;

解　由 $|x-1|\leqslant 1$ 得函数的定义域 $D=[0,2]$.

(8) $y=\sqrt{1-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

解　由 $1-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,1]$.

(9) $y=\ln(1+x^2)$;

解　由 $1+x^2>0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

(10) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$;

解　由 $x^2\neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(11) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

解　由$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\x-3\neq 0,\\5-x>0,\\5-x\neq 1\end{cases}$得函数的定义域 $D=[2,3)\cup(3,4)\cup(4,5)$.

(12) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$;

解　由$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\x^2-x-2>0\end{cases}$得函数的定义域 $D=(2,3]$.

(13) $y=2^{\frac{1}{x}}+\arccos\ln\sqrt{1-x}$;

解　由$\begin{cases}x\neq 0,\\\left|\ln\sqrt{1-x}\right|\leqslant 1,\\1-x>0\end{cases}$得函数的定义域 $D=[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

(14) $y=\begin{cases}x^2+3, & x<0,\\\lg x, & x>0;\end{cases}$

解　函数的定义域 $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

(15) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$;

解　由 $\begin{cases}x>0,\\1-\ln x\neq 0\end{cases}$ 得函数的定义域 $D=(0, e)\cup(e, +\infty)$.

(16) 已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，求下列函数的定义域：

① $f(x-4)$;　　　　② $f(\lg x)$.

解　① 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，故 $f(x-4)$ 应满足 $0\leqslant x-4\leqslant 1$，得 $4\leqslant x\leqslant 5$，即函数的定义域 $D=[4, 5]$.

② 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，故 $f(\lg x)$ 应满足 $0\leqslant \lg x\leqslant 1$，得 $1\leqslant x\leqslant 10$，即函数的定义域 $D=[1, 10]$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$;

解　不同．因为定义域不同.

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$;

解　不同．因为对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

解　相同．因为定义域、对应法则均相同.

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　不同．因为定义域不同.

3. 求下列函数的解析式：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x+1)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

解　$f(x+1)=\dfrac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\dfrac{x}{x+2}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

(2) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(x-1)$;

解　设 $t=x+\dfrac{1}{x}$，即 $x_1=\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$，所以 $f(t)=\dfrac{t^2+t\sqrt{t^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{t^2+t\sqrt{t^2-4}}$ 或 $f(t)=\dfrac{t^2-t\sqrt{t^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{t^2-t\sqrt{t^2-4}}$,

即 $f(x)=\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{x^2+x\sqrt{x^2-4}}$ 或 $f(x)=\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-4}-2}{2}+\dfrac{2}{x^2-x\sqrt{x^2-4}}$,

所以 $f(x-1)=\dfrac{x^2-2x-1+(x-1)\sqrt{(x-1)^2-4}}{2}+\dfrac{2}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$

或 $f(x-1)=\dfrac{(x-1)^2-(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}-2}{2}+\dfrac{2}{(x-1)^2-(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}}$.

(3) 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

解　由于 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}$，故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$；

解　由于 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x=f(x)$，故 $f(x)$为偶函数.

(2) $f(x)=x\sqrt{x^2-1}+\tan x$；

解　$f(-x)=(-x)\sqrt{(-x)^2-1}+\tan(-x)=-x\sqrt{x^2-1}-\tan x=-f(x)$，故 $f(x)$为奇函数.

(3) $f(x)=x(1-x)$；

解　由于 $f(-x)=(-x)[1-(-x)]=-x(1+x)$，$f(x)\neq f(-x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$故 $f(x)$为非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解　由于 $f(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$，故 $f(x)$为奇函数.

5. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；

解　是周期函数，周期为 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$；

解　是周期函数，周期为 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$；

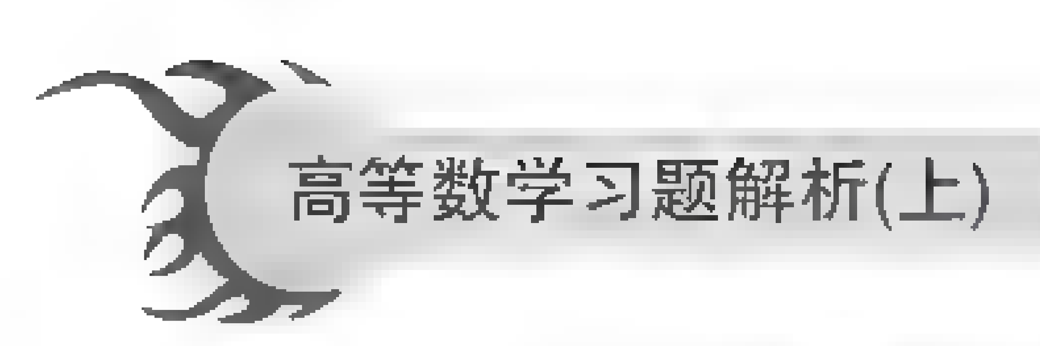
解　是周期函数，周期为 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$；

解　不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x$.

解　是周期函数，周期为 $l=\pi$.



6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$，所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

解 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$；

解 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) $y=2\sin 3x$；

解 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) $y=1+\ln(x+2)$；

解 由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$，所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

7. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\ln\sin^2 x$；

解 $y=\ln\sin^2 x$ 由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

(2) $y=5^{\cos\sqrt{x}}$；

解 $y=5^{\cos\sqrt{x}}$ 由 $y=5^u$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(3) $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$；

解 $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$ 由 $y=\arctan u$，$u=e^v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

(4) $y=\cos^2(\ln x)$.

解 $y=\cos^2(\ln x)$ 由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\ln x$ 复合而成.

8. 求下列复合函数：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt{1-[f(x)]^2}, & |f(x)|<1,\\ [f(x)]^2+1, & |f(x)|\geqslant 1.\end{cases}$

当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，$f[f(x)]=\sqrt{1-[f(x)]^2}=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=|x|$.

当 $x=0$ 时，$f(x)=1$，$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=2$.

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=x^2+1>1$，$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

因此，$f[f(x)]=\begin{cases}|x|, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1,\end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$ 即 $g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

9. 分别就 $a=2$，$a=\frac{1}{2}$，$a=-2$ 讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数．如果是，求其定义域.

解　当 $a=2$，$a=\frac{1}{2}$ 时，该函数是复合函数．当 $a=-2$ 时，该函数不是复合函数．因为 $a=-2$ 时，$\sin x$ 的值域是 $[-1, 1]$，所以 $a-\sin x$ 的值域是 $[-3, -1]$，$\lg(a-\sin x)$ 没有意义，所以 $a=-2$ 时，该函数不是复合函数.

当 $a=2$ 时，$a-\sin x$ 的值域为 $[1, 3]$，所以 x 可以取任意实数．

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$a-\sin x$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$，而 $\lg x$ 的定义域为大于 0，所以只需求这两部分的交叉部分即可，即 $\sin x<\frac{1}{2}$，得出 x 的定义域为 $\left(2k\pi-\frac{7\pi}{6}, 2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$（$k$ 为任意整数）.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解　当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=-x\leqslant 0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f[g(x)]=1-x$.

当 $x<0$ 时 $g(x)=x^2>0$，所以当 $x<0$ 时，$f[g(x)]=x^2+2$.

因此，$f[g(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 1-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

11. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解　$f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$.

令 $x=t-2$，代入得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$，即 $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$.



因此，$f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2=2^{x^2-4x}-x+4$.

12. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$.

解 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，

所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$\varphi[\varphi(x)]=1$.

仅当$|x|=1$时，$\psi(x)=1$；当$|x|\neq 1$时，$1<\psi(x)\leqslant 2$.

因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |\psi(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |\psi(x)|>1,\end{cases}$ 所以 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1;\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

易知 $\varphi[\psi(x)]$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

1.2　数列极限

1.2.1　知识点概况

1. 若函数 f 的定义域为全体正整数集合 $\mathbf{N}_+$，则称函数 $f(n)$，$n\in\mathbf{N}_+$ 为数列.

2. 数列极限的通俗定义(不精确)：对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一确定的数值 a，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

3. 数列极限的精确定义($\varepsilon-N$ 语言)：设 $\{x_n\}$ 为一数列，a 为定值，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，定值 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

上述数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言可以简写为：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$. 其中，记号 $\forall$ 表示“对任意的”“对每一个”，$\exists$ 表示“总存在”.

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就说数列 $\{x_n\}$ 不收敛，或称 $\{x_n\}$ 是发散数列.

4. (唯一性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

5. (有界性)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

6. (保号性)如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，那么存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

7. 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant0$(或 $x_n\leqslant0$)，且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么 $a\geqslant0$(或 $a\leqslant0$).

8. (夹挤原理)如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) 从某项起，即 $\exists n_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

9. 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列.

10. (收敛数列与其子数列间的关系)如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

11. 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列 $\{x_n\}$ 发散.

12. 有界的数列不一定收敛. 例如，$\{(-1)^n\}$ 是有界的但却是发散的. 这是因为它的奇数子列收敛于 -1，但是其偶数子列收敛于 1.

13. 若数列 $\{x_n\}$ 的奇数子列和偶数子列均收敛于 a，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

14. (四则运算法则)设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么 $\{x_n\pm y_n\}$，

$\{x_n \cdot y_n\}$也都是收敛数列，且有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty}y_n=A+B$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}y_n=A \cdot B$.

当$y_n\neq 0(n=1, 2, \cdots)$且$B\neq 0$时，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也是收敛数列，且有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}$.

1.2.2 习题解答

1. 观察如下数列$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$;

解 当$n\to\infty$时，$x_n=\dfrac{1}{2^n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$;

解 当$n\to\infty$时，$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}=0$.

(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n}$;

解 当$n\to\infty$时，$x_n=2+\dfrac{1}{n}\to 2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$.

(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;

解 当$n\to\infty$时，$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}\to 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $x_n=n\cdot(-1)^n$.

解 当$n\to\infty$时，$x_n=n\cdot(-1)^n$没有极限.

2. 用数列极限的定义验证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$;

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$成立，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$，取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$成立，即$n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$，取$N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，有$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$成立，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$;

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\dfrac{1}{2n^2}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|=\dfrac{n+3}{n^2+n+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$ 成立，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 可见，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}-1\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=1$.

3. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;

分析　要使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只需 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;

分析　要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析　要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

证明　因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

4. 设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　因为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又因为 $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $x_n = 1 + \frac{2}{2\times 3} + \frac{2}{3\times 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)}$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解 因为 $1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n}$,

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$.

1.3　函数极限

1.3.1　知识点概况

1. 设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，A 为常数. 如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

上述定义称为函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言，可简写为

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. $f(x)$ 在 x_0 点有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义没有关系.

3. 若当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

若当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

左、右极限更为精确的定义由下面的 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述：

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x$：$x_0-\delta<x<x_0$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x$：$x_0<x<x_0+\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

左右极限统称为单侧极限.

4. $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在等价于其左右极限都存在并且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

5. 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，A 是常数. 如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在着 $M>0$，使得当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

几何意义：当 $|x|>M$ 时，$f(x)$ 的图像落在了 $y=A+\varepsilon$ 与 $y=A-\varepsilon$ 之间.

6. (唯一性)如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么此极限值唯一.

7. (局部有界性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么存在 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

8. (局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$)，那么存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

9. 如果在某$\mathring{U}(x_0)$内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

10. (四则运算法则)若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在，则函数 $f\pm g$，$f\cdot g$ 当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

又若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则$\dfrac{f}{g}$当 $x\to x_0$ 时极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

11. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，而 C 为常数，则$\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

12. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，而 n 是正整数，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n$.

13. (复合函数的极限运算法则)设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成，$f[g(x)]$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时有 $g(x)\neq u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

1.3.2 习题解答

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；

分析 因为$|(3x-1)-8|=|3x-9|=3|x-3|$，所以要使$|(3x-1)-8|<\varepsilon$，只需$|x-3|<\dfrac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{1}{3}\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有$|(3x-1)-8|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

分析 因为$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|$，所以要使$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，只需$|x-2|<\dfrac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{1}{5}\varepsilon$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$；

分析　因为

$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$，所以要使$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只需$\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即$|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.

证明　因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，当$|x|>M$时，有$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

分析　因为$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$，所以要使$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只需$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即$x>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

证明　因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\frac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>M$时，有$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 求$f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$当$x\to0$时的左、右极限，并说明它们在$x\to0$时的极限是否存在.

解　因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^-}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在，且极限值为 1.

因为

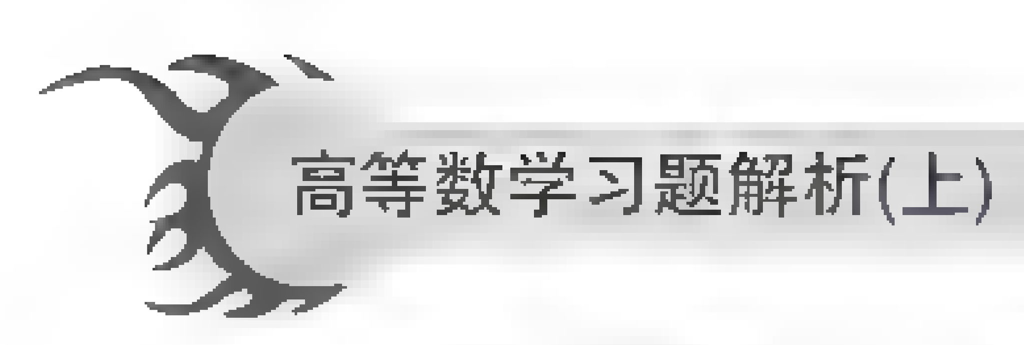
$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\varphi(x)\neq\lim_{x\to0^+}\varphi(x),$$

所以极限$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

4. 设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ 2x+1, & x\geqslant1.\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)$.



解 本题在 $x=0$ 和 $x=1$ 处左、右两侧 $f(x)$的表达式不同，故求 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限时，须考虑左、右极限．

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$.

1.4　两个重要极限

1.4.1　知识点概况

1.（夹挤原理）如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$满足下列条件：

(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0, r)$(或$|x|>M$)时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$.

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

4. 如果数列$\{x_n\}$满足条件 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，就称数列$\{x_n\}$是单调增加的；如果数列$\{x_n\}$满足条件 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，就称数列$\{x_n\}$是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

5.（单调有界原理）单调有界数列必有极限. 具体来说：

(1) 有上界的单调增加数列必有极限；

(2) 有下界的单调减少数列必有极限.

1.4.2　习题解答

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6$.

2. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}}=8$，求 a.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^a\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{a}{3}}=\mathrm{e}^a$，$\mathrm{e}^a=8$，$a=3\ln 2$.

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{\ln\cos x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\dfrac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}=-3.$$

4. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}\tan x}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\tan x\ln(1-\cos^2 x)\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\tan x(-\cos^2 x)\right\}=1.$$

5. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 原式$=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[(\cos 2x-1)+1]}{x^2}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}\right\}=e^{-2}$.

1.5 无穷小量与无穷大量

1.5.1 知识点概况

1. 设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

2. 设 α，β 为同一极限过程下的无穷小量，则 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha\beta$ 仍是无穷小量.

3. 无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

4. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 G（不论它多么大），总存在着正数 δ（或正数 M），只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>M$），对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $f(x)>G$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量.

应特别注意的问题：对于当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大量的函数 $f(x)$ 来说，按函数极限的定义，极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们习惯上说"函数的极限是无穷大量"，并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\text{（或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\text{）}.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall G>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>G$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall G>0$，$\exists M>0$，当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)|>G$.

把定义中 $|f(x)|>G$ 换成 $f(x)>G$（或 $f(x)<-G$），就记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty$.

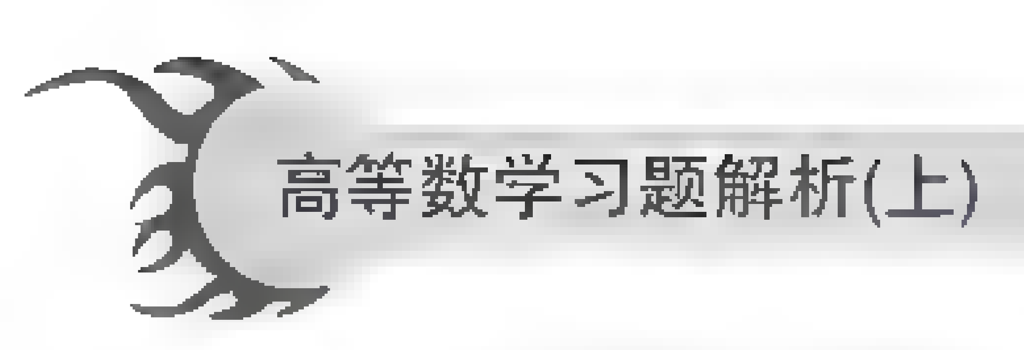
5. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的垂直渐近线.

6.（无穷大量与无穷小量之间的关系）在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，若 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

1.5.2 习题解答

1. 两个无穷小量的商是否一定是无穷小量？举例说明之.

解 不一定. 例如，当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=2x$，$\beta(x)=3x$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无穷小量.



2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$当$x\to 3$时为无穷小量；

证明 当$x\neq 3$时，$|y|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|$. 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当$0<|x-3|<\delta$时，有$|y|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon$，所以当$x\to 3$时，$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$为无穷小量.

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$当$x\to 0$时为无穷小量.

证明 当$x\neq 0$时，$|y|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|$. 因为$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当$0<|x-3|<\delta$时，有$|y|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x-0|<\delta=\varepsilon$，所以当$x\to 0$时$y=x\sin\dfrac{1}{x}$为无穷小量.

3. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；

解 因为$\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$，当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小量，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

解 因为$\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x(x\neq 1)$，当$x\to 0$时，$x$为无穷小量，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}=1$.

4. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

解 原式$=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

(2) $\lim\limits_{x\to 4}=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$；

解 原式$=\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$.

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}$；

解 令$\sqrt[3]{x+5}=t$，则$x=t^3-5$，原式$=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t-2}{t^3-8}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{1}{t^2+2t+4}=\dfrac{1}{12}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$;

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$;

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(1+n)n}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x+1}$;

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3-3x^2+5}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}}=0.$

5. 若极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 与 b 的值．

解　由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}=0$，得$\begin{cases}1-a=0,\\a+b=0,\end{cases}$故 $a=1$，$b=-1$.

6. 计算下列极限：

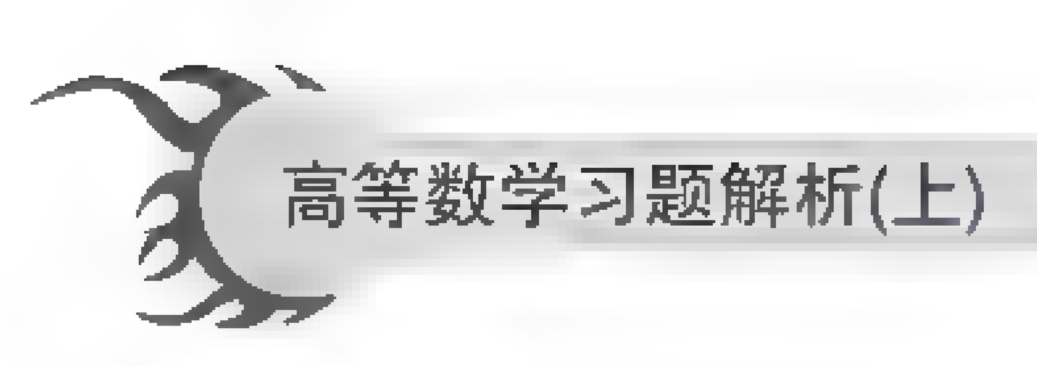
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\sin\frac{1}{n}$;

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}.$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\sin\frac{1}{n}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2}$;

解　当 $x\to 2$ 时，x^2-4 为无穷小量，$\sin\frac{1}{x-2}$为有界量.



由于无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量，则$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\sin\dfrac{1}{x-2}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\sin x}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x-\sin x}$.

解 分子、分母同时除以x得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}$，因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1}=2$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x-\sin x}=2$.

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}$；

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{n}{m}\ln(1+x)}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n\ln(1+x)}{mx}=\frac{n}{m}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{1+(x-5)}}{x-5}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\frac{1}{2}.$$

8. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 令$x=\dfrac{1}{y}$，

$$\text{原式}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+\frac{2(1-\sqrt{1+y})}{y}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}+2\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+y}}{y}$$

$$=1-1=0.$$

1.6　无穷小量的比较

1.6.1　知识点概况

1. 无穷小量是以 0 为极限的函数.

2. 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小量.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说 β 与 α 是同阶无穷小量.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小量.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

3. 设函数 f，g，h 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，且当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\sim g(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=A$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=B$.

1.6.2　习题解答

1. 当 $x\to 1$ 时，无穷小量 $1-x$ 和以下式是否同阶？是否等价？

(1) $1-x^3$；

(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)=3$，

所以当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶的无穷小量，但不是等价无穷小量.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x)=1$，

所以当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶的无穷小量，而且是等价无穷小量.

2. 当 $x\to 0$ 时，证明下式：

(1) $\arctan x\sim x$；

证明 令 $y=\arctan x$，则当 $x\to0$ 时，$y\to0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\tan y}=1$ 所以当 $x\to0$ 时，$\arctan x\sim x$.

(2) $\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

证明 因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec x-1}{\dfrac{x^2}{2}}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=1$，所以当 $x\to0$ 时，$\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$.

3. 利用等价无穷小量的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2018x)}{x}$；

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(2018x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2018x}{x}=2018$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(x^n)}{(\sin x)^m}$($n$，$m$ 为正整数)；

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\sin x}$；

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 因为 $\sin x-\tan x=\tan x(\cos x-1)=-2\tan x\sin^2\dfrac{x}{2}\sim-2x\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{2}x^3(x\to0)$，

$\sqrt[3]{1+x^2}-1=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}\sim\dfrac{1}{3}x^2(x\to0)$，

$\sqrt{1+\sin x}-1=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}+1}\sim\dfrac{\sin x}{2}\sim\dfrac{x}{2}(x\to0)$，

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{x}{2}}=-3$.

4. 证明无穷小量的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性)；

证明　$\lim\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$，所以 $\alpha\sim\alpha$.

(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$(对称性)；

证明　若 $\alpha\sim\beta$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，从而 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，因此 $\beta\sim\alpha$.

(3) 若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明　若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\dfrac{\beta}{\gamma}\cdot\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，因此 $\alpha\sim\gamma$.

5. 当 $x\to0$ 时，设无穷小量 $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\,(a>0)$ 是关于 x 的 k 阶无穷小量，则 k 是多少？

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$，所以当 $x\to0$ 时，无穷小量 $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\,(a>0)$ 是关于 x 的 3 阶无穷小，即 $k=3$.

6. 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $\sin^2x$ 为等价无穷小量，求 a 的值.

解　因为当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1\sim\dfrac{ax^2}{2}$，$\sin x\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-1}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{ax^2}{2}}{x^2}=\dfrac{a}{2}=1$，得 $a=2$.

7. 已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小量，求常数 a.

解　依题意得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{3(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ax^2}{3x^2}=\dfrac{2}{3}a=1$，

所以 $a=\dfrac{3}{2}$.

8. 当 $x\to0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小量，则 n 为(　　).

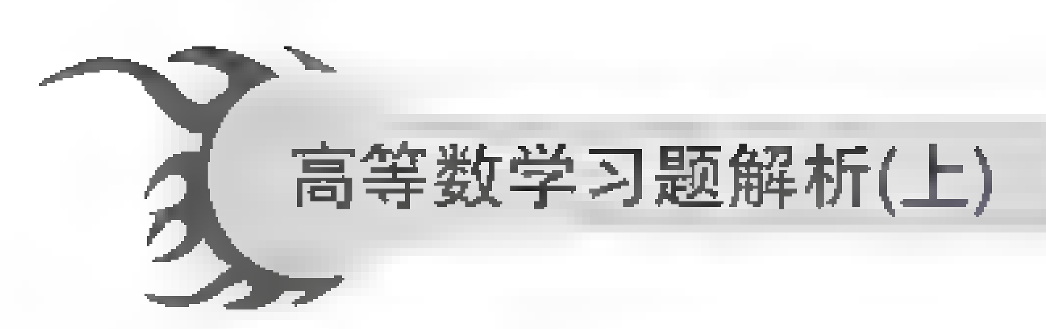
(A) 5　　　　(B) 4　　　　(C) $\dfrac{5}{2}$　　　　(D) 2

解　因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$，又因为当 $x\to0$ 时，$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\dfrac{x^4}{2}\right)$，所以选(A).

9. 当 $x\to0$ 时，下列 4 个无穷小量中比其他 3 个更加高阶的无穷小量是(　　).

(A) $\ln(1+x)$　　　　(B) e^x-1　　　　(C) $\tan x-\sin x$　　　　(D) $1-\cos x$

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，



$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\frac{1}{2}$.

选(C).

10. 设 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量，其中 a，b，c 是常数，则(　　).

(A) $a=b=1$，$c=0$　　(B) $a=c=1$，$b=0$

(C) $a=c=2$，$b=0$　　(D) $a=b=1$，$c=0$

解　由题意得 $\lim\limits_{x\to 0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0$，所以 $c=1$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-a-\frac{b}{x}\right)=0$.

所以 $b=0$，$a=1$.

选(B).

11. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$(　　).

(A) 存在　　(B) 不存在

(C) 不一定存在　　(D) 存在但非零

解　若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在；若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在. 故选(C).

12. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

证明　$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

13. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^4-x+3}$;

解　原式 $=\frac{1-4+3}{1-1+3}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$;

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+2x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+2x^3}=10$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+6}{x^3-x-1}$;

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{(4x+1)^{30}}{x^{30}}\cdot\dfrac{(9x+2)^{20}}{x^{20}}}{\dfrac{(6x-1)^{50}}{x^{50}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^{30}\cdot\left(9+\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(6-\dfrac{1}{x}\right)^{50}}$

$$=\frac{4^{30}\times 9^{20}}{6^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

14. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

解　令 $x-\dfrac{\pi}{2}=y$，原式$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-\sin y}{y}=-1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

解　令$\dfrac{\pi}{4}-x=y$，原式$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\tan y}{\tan 2y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{2y}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1+1-\cos 5x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(3x)^2}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{2x^2}=8.$$

15. 分析下面求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$的解法是否正确.

当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

解　在利用等价无穷小量代换求极限时，只有对所求极限式中相乘或相除的因式才能用等价无穷小量来替代，而对极限式中的相加或相减部分则不能随意替代.

16. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$;



解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos x=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}\cdot\dfrac{2(3x^2+5)}{5x^2+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+10}{5x^2+3x}$

$=1\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$，$x$ 是不为 0 的常数；

解 原式$=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{x}\sin\dfrac{x}{2^n}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x$.

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin 2x}{x}}{1+\dfrac{\sin 3x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{1+3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$;

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sin x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\dfrac{1}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\left(-\frac{1}{x}\right)(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$.

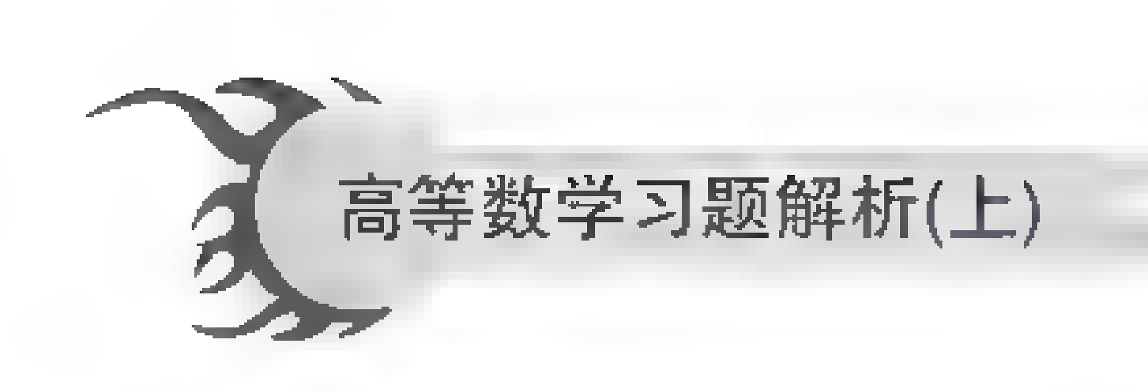
(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$；

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(-\frac{2}{x}\right)}=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]$

$$=\exp\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\dfrac{2}{x}\right)\right]=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.



1.7　函数的连续性与间断点

1.7.1　知识点概况

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 记 $\Delta x=x-x_0$，称为自变量 x 在点 x_0 的增量或改变量，相应的函数 y 在点 x_0 的增量记为 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

3. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

4. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义，也可用如下 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述：设函数 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在着 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

5. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U_-(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；设函数 $y=f(x)$ 在某 $U_+(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

6. 左、右连续与连续的关系：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续等价于 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既右连续又左连续.

7. 设函数 $f(x)$ 在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义. 如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

(1) 在 x_0 没有定义；

(2) 虽在 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 x_0 有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而 f 在点 x_0 没有定义或者有定义但是 $f(x_0)\neq A$，则称点 x_0 为 f 的可去间断点.

9. 若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在，然而 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点 x_0 为 f 的跳跃间断点.

10. 可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点，其特点是函数在该点处左、右极限都存在. 函数的所有其他形式的间断点，即使得函数至少有一侧极限不存在的点，称为第二类

间断点.

1.7.2　习题解答

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cdot(\frac{x}{2})^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，而 $f(0)=a$，所以 $a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断，则常数 a 与 b 应满足怎样的关系？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(a+bx^2)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx^2}{x}=b$，所以 $a\neq b$.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则(　　).

(A) $g[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(C) $[g(x)]^2$ 必有间断点　　(D) $f[g(x)]$ 必有间断点

解　若 $F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 为连续函数，则 $g(x)=f(x)F(x)$ 必为连续函数，与题目中 $g(x)$ 有间断点.矛盾.选(B).

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

解　因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1,\end{cases}$ 所以选(B).

5. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性.

解　因为若 $x\neq 0$，

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上连续.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$，

所以，$f(x)$在$x=\pm1$，0 处间断，属第一类间断点，其中$x=0$是可去间断点，$x=\pm1$为跳跃间断点.

6. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2; \end{cases}$

解 已知多项式函数是连续函数，所以函数$f(x)$在$[0, 1)$和$(1, 2]$内是连续的.

在$x=1$处，因为$f(1)=1$，并且

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$.

所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，从而函数$f(x)$在$x=1$处是连续的.

综上所述，函数$f(x)$在$[0, 2]$上是连续函数.

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$

解 只需考察函数在$x=-1$和$x=1$处的连续性.

在$x=-1$处，因为$f(-1)=-1$，并且

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} 1=1\neq f(-1)$，

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} x=-1=f(-1)$，

所以函数在$x=-1$处间断，但右连续.

在$x=1$处，因为$f(1)=1$，并且

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1=f(1)$；$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1=f(1)$.

所以函数在$x=1$处连续.

综合上述讨论，函数在$(-\infty, -1)$和$(-1, +\infty)$内连续，在$x=-1$处间断，但右连续.

7. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

解 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在$x=2$和$x=1$处无定义，所以$x=2$和$x=1$是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，所以$x=2$是函数的第二类间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$，所以$x=1$是函数的第一类间断点，并且是可去间断点．在$x=1$处，令$y=-2$，则函数在$x=1$处成为连续的．

(2) $y=\frac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；

解　函数在点$x=k\pi(k\in \mathbf{Z})$和$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$处无定义，因而这些点都是函数的间断点．

因$\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty(k\neq 0)$，故$x=k\pi(k\neq 0)$是第二类间断点．

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0(k\in \mathbf{Z})$，所以$x=0$和$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$是第一类间断点，且是可去间断点．

令$y|_{x=0}=1$，则函数在$x=0$处成为连续的；

令$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y=0$，则函数在$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$处成为连续的．

(3) $y=\cos^2\frac{1}{x}$，$x=0$；

解　因为函数$y=\cos^2\frac{1}{x}$在$x=0$处无定义，所以$x=0$是函数$y=\cos^2\frac{1}{x}$的间断点．又因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\frac{1}{x}$不存在，所以$x=0$是函数的第二类间断点．

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$ $x=1$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$，所以$x=1$是函数的第一类间断点，且为跳跃间断点．

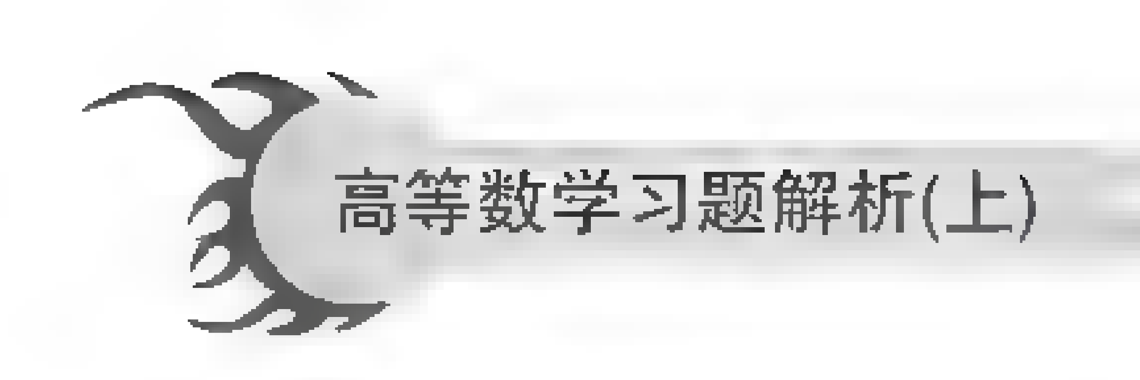
8. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，判别其类型．

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1.\end{cases}$

在分段点$x=-1$处，因为$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(-x)=1$，

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x=-1$，所以$x=-1$为函数的第一类间断点，且为跳跃间断点．

在分段点$x=1$处，因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x)=-1$，所以$x=1$为函数的第一类间断点，且为跳跃间断点．



1.8 连续函数的运算、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质

1.8.1 知识点概况

1. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)在点 x_0 也连续.

2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y: y=f(x), x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

3. 设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 u_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

4. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$(或 $f(x)\geqslant f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

6.(有界性与最大值、最小值定理)在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

7. 如果 x_0 使得 $f(x_0)=0$，则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

8.(零点定理)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$.

其几何意义为：如果连续曲线弧的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段弧与 x 轴至少有一个交点.

9.(介值定理)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

10. 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

1.8.2 习题解答

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$，函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内除点 $x=2$

和 $x=-3$ 外是连续的，所以函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-3)$，$(-3,2)$，$(2,+\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$. 在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}$.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在点 x_0 也连续.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此 $\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]$，

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\varphi(x)&=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]\\&=\frac{1}{2}[\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)+|\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)|]\\&=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0),\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 也连续.

同理可证明 $\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2-2x+5}$；

解 因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ 是初等函数，$f(x)$ 在点 $x=0$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to0}\sqrt{x^2-2x+5}=f(0)=\sqrt{0^2-2\times0+5}=\sqrt{5}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin2x)^3$；

解 因为函数 $f(x)=(\sin2x)^3$ 是初等函数，$f(x)$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin2x)^3=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos2x)$；



解　因为函数 $f(x)=\ln(2\cos 2x)$ 是初等函数，$f(x)$ 在点 $x=\frac{\pi}{6}$ 有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；

解　$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=\frac{4}{\sqrt{5\times 1-4}+\sqrt{1}}=2.$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

解　$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos\frac{a+a}{2}\cdot 1=\cos a.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=1.$$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；

解　$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}$；

解　$\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\ln 1=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$；

解　$\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}\right]^3=e^3.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$；

解　$\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}.$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3}{6+x}\cdot\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{3}{2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}.$

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2x}+1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin^2x}-1)(\sqrt{1+\sin^2x}+1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\tan x-\sin x)(\sqrt{1+\sin^2x}+1)}{x\sin^2x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

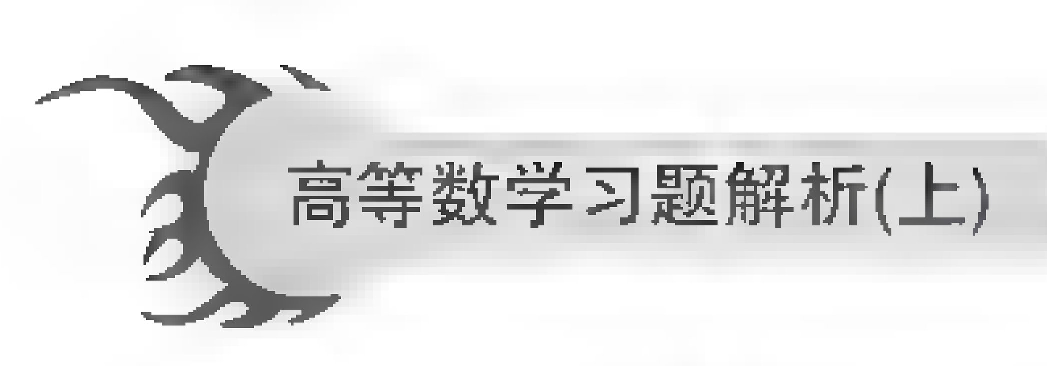
5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant0.\end{cases}$ 应当如何选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数？

解　要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即只需 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=a.$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$，所以只需取 $a=1$.

6. 确定 k 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\sin x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解　$f(0)=k$，$x\to0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\cos\dfrac{1}{x}$ 的绝对值小于等于 1，故 $f(x)=\sin x\cos\dfrac{1}{x}=0$，所以，当 $k=0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.



7. 计算函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的连续区间.

解 因为函数是初等函数，它们的定义区间就是连续区间，所以连续区间即为 $(-2, 2)$.

8. 指出函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}$ 的间断点，并指明其类型.

解 因为其为初等函数，定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$，在 $x=0$，$x=1$ 无定义.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2-x}=-1$，$x=0$ 是可去间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin x}{x^2-x}=\infty$，$x=1$ 是第二类无穷间断点.

9. 试确定 a 和 b 的值，使 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

解 因为 $f(x)$ 在 $x=a$，$x=1$ 处无定义，$x=a$，$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty$，故 $a=0$.

又由于 $x=1$ 为可去间断点，有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{e^x-b}{x(x-1)},$$

上式应为 $\frac{0}{0}$ 型，即故 $b=e$.

10. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 是闭区间 $[1, 2]$ 上的连续函数. 因为 $f(1)=-3$，$f(2)=25$，$f(1)f(2)<0$，所以由零点定理，在 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $x=\xi$ 是方程 $x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根. 因此方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

11. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=a\sin x+b-x$，则 $f(x)$ 是 $[0, a+b]$ 上的连续函数. $f(0)=b$，$f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\leqslant0$. 若 $f(a+b)=0$，则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根；若 $f(a+b)<0$，则 $f(0)f(a+b)<0$，由零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0, a+b)$，使 $f(\xi)=0$，这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根. 总之，方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

12. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x，y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)f(b)<0$，证明：至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

证明 设 x_0 为 (a, b) 内任意一点. 因为 $0\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}L|x-x_0|=0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续. 同理可证 $f(x)$ 在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $f(a)f(b)<0$，由零点定理，至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

1.9　总习题解答

1. 填空题

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x+4)}}$的定义域为________.

解　欲使函数有定义，则 x 满足$\begin{cases}\ln(x+4)>0\\ x+4>0\end{cases}$，解得 $x>-3$，所以函数定义域为$(-3,+\infty)$.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \sin x-\cos x, & x<0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(\sin x-\cos x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(e^x-2)=-1$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$.

(3) $x=0$ 是 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{2x}$的________间断点.

解　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{2x}=0$，所以 $x=0$ 是第一类间断点，且为可去间断点.

(4) 要使 $f(x)=(1+x^2)^{-\frac{2}{x^2}}$ 在 $x=0$ 处连续，应补充定义 $f(0)$的值为________.

解　因为 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，

又$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{-2}=e^{-2}$，所以 $f(0)=e^{-2}$.

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x<1,\\ a, & x\geqslant1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$________.

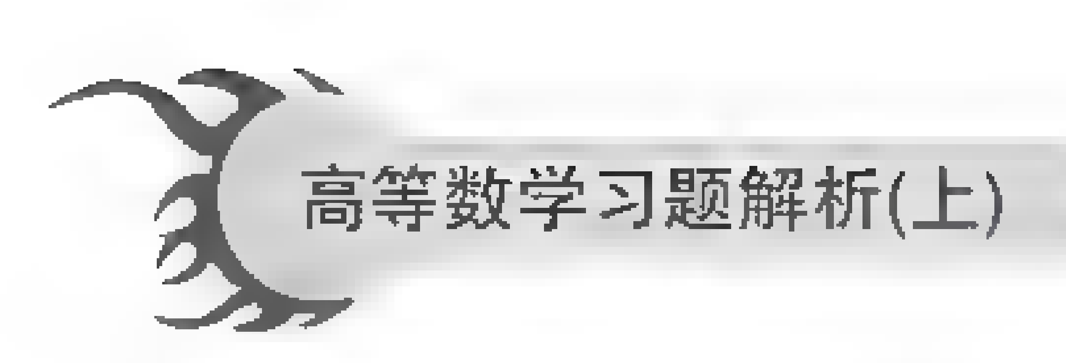
解　因为 $f(x)$连续，所以 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}a$，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$，所以 $a=3$.

(6) 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，则函数 $f[g(x)]=$________.

解　$f[g(x)]=f(2^x)=(2^x)^2=2^{2x}$.

(7) 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$的定义域为________.

解　欲使函数有定义，则 x 应满足$\begin{cases}\dfrac{3-x}{x+2}\geqslant0\\ x+2\neq0\end{cases}$，解不等式组得$(-2,3]$.



(8) $y=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$有________个间断点.

解 观察函数存在间断点，即间断点为方程 $x^2-3x+2=0$ 的解，因为此方程为二元一次方程且 $\Delta>0$，所以此方程有两个解，故原函数有 2 个间断点.

2. 选择题

(1) 数列有界是数列收敛的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解 数列有界是数列收敛的必要条件.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=$(　　).

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) ∞　　(D) $\frac{1}{n}$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to1}f(x)=$(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) ∞　　(D) 不存在

解 函数极限和在点 $x=1$ 的函数值无关，所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}1=1$.

(4) $x\to0$ 时，$1-\cos2x$ 是 x^2 的(　　).

(A) 高阶无穷小量　　(B) 同阶无穷小量，但不等价

(C) 等价无穷小量　　(D) 低阶无穷小量

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2.$

所以当 $x\to0$ 时，$1-\cos2x$ 是 x^2 的同阶无穷小量，又$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}\neq1$，故二者不是等价无穷小量.

(5) 如果 $x\to\infty$时，$\frac{1}{ax^2+bx+c}$是比$\frac{1}{x+1}$高阶的无穷小量，则 a，b，c 应满足(　　).

(A) $a=0$，$b=1$，$c=1$　　(B) $a\neq0$，$b=1$，c 为任意数

(C) $a\neq0$，b 和 c 为任意数　　(D) a，b，c 都可以是任意数

解 根据题意有：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}=0$，即 $a\neq0$，b、c 为任意数.

(6) 在 $x\to0$ 时，下面说法中错误的是(　　).

(A) $x\sin x$ 是无穷小量　　(B) $x\sin\frac{1}{x}$是无穷小量

(C) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是无穷大量　　　　(D) $\frac{1}{x}$是无穷大量

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不存在，所以$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不可能是无穷大量.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=($　　$)$.

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) -1　　　(D) 不存在

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{x}{x}\right)=-1$. 左右极限存在但不相等，故极限不存在.

3. 计算题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(2x-1)$.

解 $f(2x-1)=\begin{cases}2(2x-1)+1, & 2x-1\geqslant 0;\\ (2x-1)^2+4, & 2x-1<0.\end{cases}$

即 $f(2x-1)=\begin{cases}4x-1, & x\geqslant\frac{1}{2};\\ 4x^2-4x+5, & x<\frac{1}{2}.\end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$，$\alpha(x)=\sqrt[3]{1+3x^3}-\sqrt[3]{1-3x^3}\sim Ax^k$，试确定 A 及 k.

解 因为$[(1+3x^3)-1]=[(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}-1][(1+3x^3)^{\frac{2}{3}}+(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}+1]$，

所以$(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}-1=\frac{(1+3x^3)-1}{(1+3x^3)^{\frac{2}{3}}+(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}+1}$，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+3x^3-1}{[(1+3x^3)^{\frac{2}{3}}+(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}+1]\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3}{3x^3}=1.$

同理$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-3x^3)^{\frac{1}{3}}-1}{x^3}=-1$

故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^3}-\sqrt[3]{1-3x^3}}{x^3}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+3x^3)^{\frac{1}{3}}-1}{x^3}-\frac{(1-3x^3)^{\frac{1}{3}}-1}{x^3}\right]=1-(-1)=2,$$

故 $\alpha(x)\sim 2x^3$，即 $A=2$，$k=3$ 为所求.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2=2(1-\cos 2x\sim 2x^2$，$\tan x\sim x)$.

第 2 章　导数与微分

2.1　导数的概念

2.1.1　知识点概况

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，或 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果上式的极限不存在，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

2. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导. 此时，对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这样就构成了一个新的函数，这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 y'，$f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 导函数 $f'(x)$ 简称导数，$f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

3. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U_+(x_0)$ 内有定义. 若

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{或}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

设函数 $y=f(x)$ 在某 $U_-(x_0)$ 内有定义. 若

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{或}\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

左、右导数统称为单侧导数.

4. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数和右导数都存在且相等.

5. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，那么这时曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$。

由直线的点斜式方程可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0, y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线. 如果 $f'(x_0)\neq 0$，那么法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

6. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在且为 $f'(x_0)$. 此时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

这就是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的. 所以，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数在该点必连续. 但是，另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点处可导.

2.1.2 习题解答

1. 选择题

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　　(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在　　(D) 左、右导数都不存在

解　左导数存在，右导数不存在，选(B).

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 a、b 的值满足(　　).

(A) $a=0$，$b=0$　　(B) $a=1$，$b=1$

(C) a 为任意常数，$b=0$　　(D) a 为任意常数，$b=1$

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax+b-b}{x}=a$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-b}{x}$ 存在且为 a，则 $a=b=0$. 选(A).

(3) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　　　　　(D) 既非充分条件也非必要条件

解　因$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(h)-F(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)(1+|\sin h|)-f(0)(1+|\sin 0|)}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)(1+|\sin h|)-f(0)}{h},$$

则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 可导充分必要条件.

2. 判断题

(1) 若 $f(x)$在 x_0 处左、右导数都存在，则 $f(x)$在 x_0 可导.　　（　　）

解　错，若 $f(x)$在 x_0 左、右导数存在且相等，则 $f(x)$在 x_0 可导.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$均在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则 $f(x_0)=g(x_0)$.　　（　　）

解　错，若 $f(x)$，$g(x)$均在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则有 $f(x_0)=g(x_0)+C$，其中 C 为常数.

(3) 若 $f(x)$，$g(x)$均在 x_0 可导，且 $f(x_0)=g(x_0)$，则 $f'(x_0)=g'(x_0)$.　　（　　）

解　错，例如 $f(x)=x+1$，$g(x)=2x$ 在 $x=1$ 时函数值相等，但 $f'(1)=1\neq g'(1)=2$.

(4) 若 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，$x\neq x_0$ 时 $f(x)=g(x)$，则 $f(x)$和 $g(x)$在 x_0 处具有相同的可导性.　　（　　）

解　错，因为可导必连续，若 $f(x)$和 $g(x)$在 x_0 处连续性不同的话，则 $f(x)$和 $g(x)$在 x_0 处的可导性就一定不相同.

(5) 若存在 x_0 的一个邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使得 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时 $f(x)=g(x)$，则 $f(x)$和 $g(x)$在 x_0 处具有相同的可导性. 若可导，则 $f'(x_0)=g'(x_0)$.　　（　　）

解　对.

3. 计算题

(1) 已知直线运动方程 $s=3t^2+2t+1$，分别令 $\Delta t=1$，0.1，0.01 ，求从 $t=2$ 至 $t=2+\Delta t$ 这一段时间内运动的平均速度及 $t=2$ 时的瞬时速度.

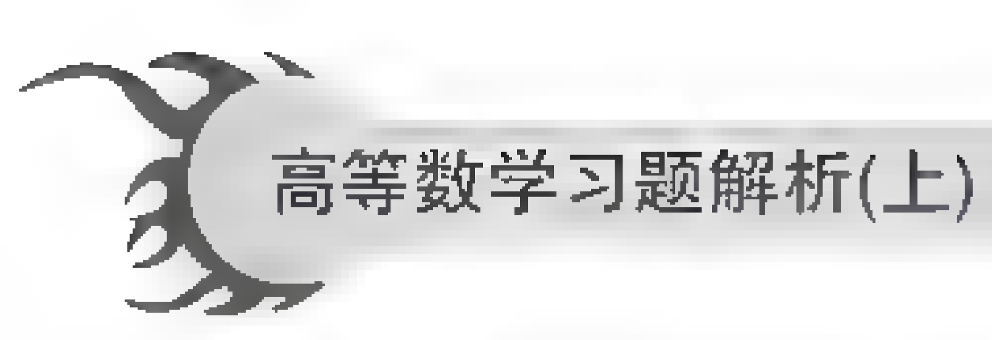
解　$\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\dfrac{[3(2+\Delta t)^2+2(2+\Delta t)+1]-(3\cdot 2^2+2\cdot 2=1)}{\Delta t}$

$$=\frac{3\Delta t^2+14\Delta t}{\Delta t}=14+3\Delta t$$

因此从 $t=2$ 至 $t=2+\Delta t$ 的平均速度是 $14+3\Delta t$. 分别将 Δt 的值 1，0.1，0.01 代入，求出平均速度分别为 17，14.3 ，14.03. 在 $t=2$ 时的瞬时速度是 14.

(2) 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比. 试由此给出变速旋转的角速度的定义.

解　变速旋转的角速度包括平均角速度与瞬时角速度. 平均角速度是差商概念，从 t 至 $t+\Delta t$ 时间内的平均角速度为$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}$. 瞬时角速度是导数概念，从 t 至 $t+\Delta t$ 时间内的瞬时角速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}$.



(3) 求曲线 $y=\cos x$ 在点(0，1)处的切线方程与法线方程．

解 $y'=-\sin x$，$y'|_{x=0}=0$，所以切线和法线方程分别为 $y=1$，$x=0$.

(4) 求下列函数的导函数：

① $f(x)=|x|^3$；

解 $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0;\\ -3x^2, & x<0.\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x\,(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$ $(x\neq 0)$，$x=0$ 处导数不存在.

(5) 设有一吊桥，其铁链成抛物线形，两端系于相距 100m 高度相同的支柱上，铁链的最低点在悬点下 10m 处，求铁链与支柱所成的夹角.

解 建立平面直角坐标系，则这个抛物线型方程是 $y=\dfrac{1}{250}x^2-10$，对此求导得：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{125}x$，那么在点$(-50，0)$处的切线方程是 $y=-\dfrac{2}{5}x-20$，则夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{2}{5}$.

2.2　求导法则

2.2.1　知识点概况

1. 如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 在点 x 可导，那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数，并且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$
$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

2. 如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x=\{x: x=f(y), y\in I_y\}$ 内也可导，并且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

3. 如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，函数 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

4. 常数和基本初等函数的导数公式：

(1) $(C)'=0$；

(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；

(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$；

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$；

(10) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

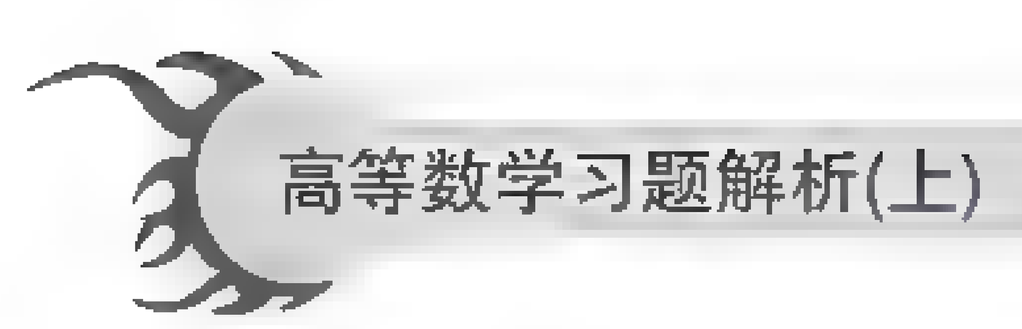
(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

(16) $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.2.2　习题解答

1. 求下列函数在指定点的导数：



(1) 设 $f(x)=\sin x-\cos x$，求$f'(x)|_{x=\frac{\pi}{6}}$，$f'(x)|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

解 $f'(x)=\cos x+\sin x$，$f'(x)|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$f'(x)|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

(2) 设 $f(x)=\frac{x}{\cos x}$，求 $f'(0)$，$f'(\pi)$.

解 $f'(x)=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$，$f'(0)=1$，$f'(\pi)=-1$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4+3x-6$；

解 $y'=4x^3+3$.

(2) $y=2x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{5}{3}}-6x$；

解 $y'=3x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{2}{3}}-6$.

(3) $y=\frac{a-x}{a+x}$；

解 $y'=\frac{-2a}{(a+x)^2}$.

(4) $y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}$；

解 $y'=\frac{1}{m}-\frac{m}{x^2}$.

(5) $y=x\sin x+\cos x$；

解 $y'=x\cos x$.

(6) $y=x\tan x-\cot x$；

解 $y'=\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$.

(7) $y=e^x\cos x$；

解 $y'=e^x(\cos x-\sin x)$.

(8) $y=\frac{x}{4^x}$；

解 $y'=\frac{1-x\ln 4}{4^x}$.

(9) $y=x^3\log_3 x$；

解 $y'=3x^2\log_3 x+x^2\log_3 e$.

(10) $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$；

解 $y'=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

(11) $y=x^2\arcsin x$；

解　$y'=2x\arcsin x+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) $y=\arctan x^2$.

解　$y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\sin x$，求导数 $f'(x)$.

解　$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\sin x+x^{\frac{2}{3}}\cos x,\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0.\end{cases}$

4. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{3\pi}{4}$.

5. 设 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)=\sin x$，求 $f'[f(x)]$，$\{f[f(x)]\}'$.

解　$f'[f(x)]=f'(\sin 2x)=2\cos(2\sin 2x)$；

$\{f[f(x)]\}'=4\cos(2\sin 2x)\cdot\cos 2x$.

6. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$均在 x_0 的某邻域内有定义，$f(x)$在 x_0 处可导，且 $f(x_0)=0$，$g(x)$在 x_0 处连续，讨论 $f(x)g(x)$在 x_0 的可导性.

解　可导，且导数为 $f'(x_0)g(x_0)$. 这是因为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0};\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f'(x_0)g(x_0).$$

2.3 高阶导数

2.3.1 知识点概况

1. 一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是关于 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''、$f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]',\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数，并简称为导数. 类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……一般地，$n-1$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)} 或 \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么函数 $f(x)$ 在某 $U(x)$ 内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

2. 如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那么用数学归纳法可以证明 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$. 其中，$u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$. 这一公式称为莱布尼茨公式.

2.3.2 习题解答

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=2x^2+\ln x$；

解 $y''=(y')'=\left(4x+\frac{1}{x}\right)'=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$；

解 $y''=(y')'=\left[e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]'=\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})$.

(3) $y=\sin ax+\cos bx$；

解 $y''=(y')'=(a\cos ax-b\sin bx)'=-(a^2\sin ax+b^2\cos bx)$.

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

解 $y''=(y')'=\left[\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]'=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

(5) $y=\tan x$；

解　$y''=(y')'=(\sec^2 x)'=2\sec x\cdot\tan x\cdot\sec x=2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$.

(6) $y=\arctan\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

解　$y''=(y')'=\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\right]'=\left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)'=-2\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=xe^x$；

解　$y^{(n)}=(x+n)e^x$.

(2) $y=x\cos x$；

解　$y^{(n)}=n\cos\left(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)+x\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$.

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

解　$y^{(n)}=(-1)^n\cdot 2\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

(4) $y=\ln(3+7x-6x^2)$.

解　$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(-2)^n(n-1)!}{(3-2x)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}3^n(n-1)!}{(1+3x)^n}$.

3. 已知函数 $y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$.

解　利用莱布尼茨公式：$y^{(4)}=(\sqrt{2})^4e^x\cos(x+\pi)=-4e^x\cos x$.

4. 设函数 $z=g(y)$，$y=f(x)$都存在二阶导数，求复合函数 $z=g[f(x)]$的二阶导数.

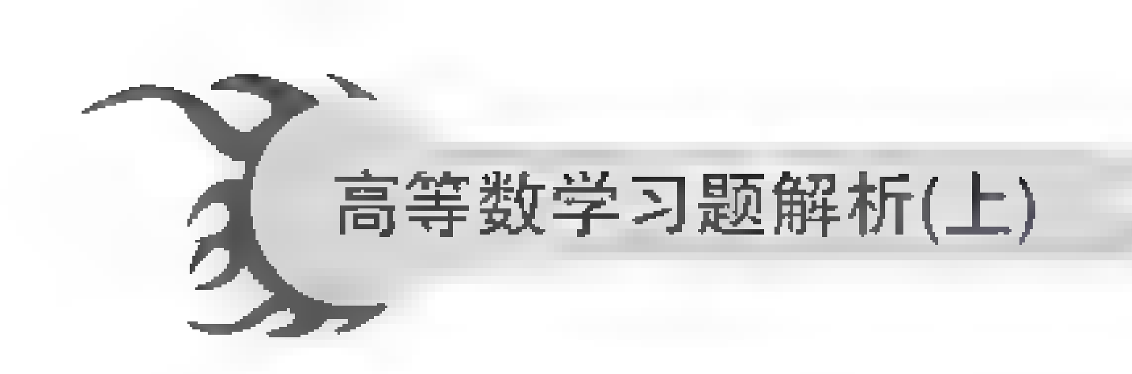
解　$\dfrac{d^2z}{dx^2}=g''[f(x)][f'(x)]^2+g'[f(x)]f''(x)$.

5. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

解　$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!$.

6. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

解　利用展开式：$f^{(2k)}(0)=0$，$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$.



2.4 隐函数的导数、对数求导法、参变量函数的导数

2.4.1 知识点概况

1. 如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

2. 对数求导法适用于求幂指函数 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 的导数及多因子之积和商的导数. 设 $y=f(x)$，两边取对数得

$$\ln y=\ln f(x),$$

两边对 x 求导，注意到 $y=y(x)$ 得

$$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]',$$

从而 $y'=f(x)[\ln f(x)]'$.

3. 设 y 与 x 的函数关系是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$ 确定的，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数，简称为参变量函数. 其导数为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，也可以表示为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

2.4.2 习题解答

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $x^3+y^3-3axy=0$；

解 $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

(2) $x^2-xy+y^2=1$；

解 $\frac{2x-y}{x-2y}$.

(3) $y^2+2\ln y=x^4$；

解 $\frac{2x^3y}{1+y^2}$.

(4) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$.

解 $\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$.

2. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

解　$-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.

(2) $y=1+xe^y$；

解　$\dfrac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$.

(3) $x^2+y^2=r^2$；

解　$-\dfrac{r^2}{y^3}$.

(4) $y^2=2px$.

解　$-\dfrac{p^2}{y^3}$.

3. 求下列参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$

解　$\dfrac{3b}{2a}t$.

(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta;\end{cases}$

解　$\dfrac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

(3) $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3;\end{cases}$

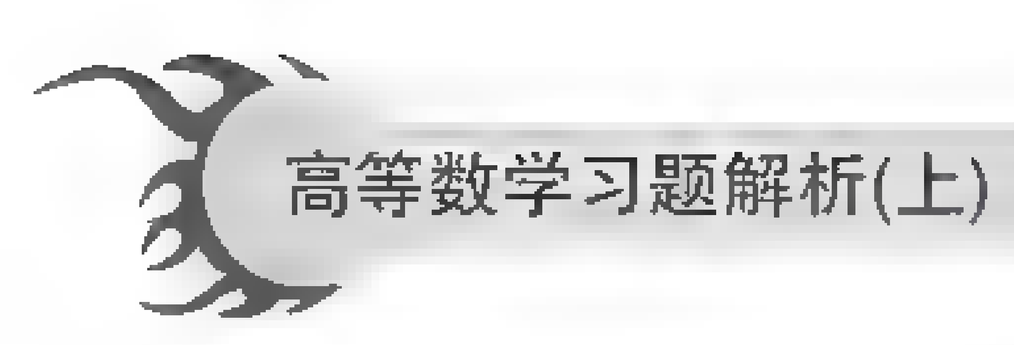
解　$\dfrac{3}{2}(1+t)$.

(4) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解　$\dfrac{1}{2t}$.

4. 设$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}$.

解　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=\dfrac{\sin\pi}{1-\cos\pi}=0$.



5. 求曲线方程$\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^2 \end{cases}$在点 $t=1$ 处的切线与法线方程.

解 切线方程 $y=\frac{1}{2}x$，法线方程 $y=-2x$.

6. 设 $y=(1+x^2)^{\arctan x}$，求 y'.

解 由已知得，$\ln y=\arctan x\ln(1+x^2)$，两边分别求导得 $\frac{1}{y}y'=\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{\arctan x}{1+x^2}\cdot 2x\right]$，则 $y'=(1+x^2)^{\arctan x-1}[\ln(1+x^2)+2x\arctan x]$.

7. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 可导，且 $g(x)\neq 0$，$f(x)>0$，求 $y=\sqrt[g(x)]{f(x)}$的导数.

解 由已知得，$\ln y=\frac{\ln f(x)}{g(x)}$，则 $\frac{1}{y}y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)\ln f(x)}{g^2(x)f(x)}$，那么 $y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)\ln f(x)}{g^2(x)f(x)}\cdot\sqrt[g(x)]{f(x)}$.

2.5　函数的微分

2.5.1　知识点概况

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义. 当给 x_0 一个增量 Δx，且 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$ 时，相应得到函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果存在不依赖于 Δx 的常数 A，使得 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分，记作

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

2.5.2　习题解答

1. 求下列函数的微分：

(1) $y=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4$；

解　$(1-x+x^2-x^3)\mathrm{d}x$.

(2) $y=x\sin 2x$；

解　$(\sin 2x+2x\cos 2x)\mathrm{d}x$.

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；

解　$\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

(4) $y=\ln^2(1-x)$；

解　$\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x$.

(5) $y=\mathrm{e}^{ax}\cos bx$；

解　$\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)\mathrm{d}x$.

(6) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解　$-\dfrac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

2. 求下列函数在指定点的 Δy 及 $\mathrm{d}y$：

(1) $y=x^2-x$，在点 $x=1$；

解 $\Delta y|_{x=1}=2\Delta x+(\Delta x)^2$，$dy|_{x=1}=dx$.

(2) $y=\sqrt{x+1}$，在点 $x=0$.

解 $\Delta y|_{x=0}=\sqrt{1+\Delta x}-1$，$dy|_{x=0}=\frac{1}{2}dx$.

2.6　总习题解答

1. 填空题

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数存在，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$ ________.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{2\sin x}+6\lim_{x\to 0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{-3\tan x}$$

$$=f'(1)+2f'(1)+6f'(1)$$

$$=9f'(1).$$

(2) 已知 $f(-x)=-f(x)$，且 $f'(-x_0)=k$，则 $f'(x_0)=$ ________.

解　$f'(-x_0)=\lim\limits_{x\to -x_0}\dfrac{f(x)-f(-x_0)}{x+x_0}=\lim\limits_{x\to -x_0}\dfrac{f(x)+f(x_0)}{x+x_0}=k$，

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{令 }x=-y}{=\!=\!=}\lim_{y\to -x_0}\frac{f(-y)-f(x_0)}{-y-x_0}$$

$$=\lim_{y\to -x_0}\frac{-f(y)-f(x_0)}{-y-x_0}=k.$$

(3) 设 $f'(0)=1$，$f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________.

解　原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\dfrac{1}{2}x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}$$

$$\overset{\text{令 }1-\cos x=y}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}.$$

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$ ________.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{k\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$

所以 $k=\dfrac{1}{3}$.

(5) 设 $y=\sin x^2$，则 $\dfrac{dy}{d(x^3)}=$ ________.

解 令 $t=x^3$，则 $y=\sin t^{\frac{2}{3}}$，所以 $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\cos t^{\frac{2}{3}}=\frac{2\cos x^2}{3x}$.

(6) 已知 $\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$________.

解 由已知得 $f'\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot(-2x^{-3})=\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}x^2$，令 $t=\frac{1}{x^2}$，则 $f'(t)=-\frac{1}{2t}$，所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-1$.

(7) 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$________.

解 对 x 求导得 $e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(y+xy')=0$，

所以 $e^{x+y}(1+y')=\sin(xy)(y+xy')$，

则解方程得 $y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$，

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

(8) 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^2\end{cases}$ 上对应点 $t=2$ 处的切线方程为________.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{2t}=1$，即切线斜率为 1，$t=2$ 时，点为(5，4)，点斜式方程 $y-4=1\cdot(x-5)$，整理得 $y=x-1$.

(9) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

解 直线 $x+y=1$ 的斜率为 -1，所以要求的直线方程斜率为 1，曲线 $y'=\frac{1}{x}$，此时 $x=1$，点为(1，0)，点斜式写方程为 $y=x-1$.

2. 选择题

(1) 若极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a-h^2)-f(a+h^2)}{e^{h^2}-1}=A$，则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A) 不一定可导　　(B) 不一定可导，但 $f'_+(a)=A$

(C) 不一定可导，但 $f'_-(a)=A$　　(D) 可导，且 $f'(a)=A$

解 选(A).

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，则参数 λ 的值满足(　　).

(A) $\lambda>0$　　(B) $\lambda>1$　　(C) $\lambda>2$　　(D) $\lambda>3$

解 $f'(x)=\begin{cases}x^{\lambda-3}\left(\lambda x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}\right), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

若导函数在 $x=0$ 处连续，则需 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-3}\left(\lambda x^2\sin\dfrac{1}{x^2}-2\cos\dfrac{1}{x^2}\right)=0$，则 $\lambda-3>0$，即 $\lambda>3$.

(3) 设 $f'(a)>0$，则 $\exists\delta>0$，有(　　).

(A) $f(x)\geqslant f(a)(x\in(a-\delta,\ a+\delta))$

(B) $f(x)\leqslant f(a)(x\in(a-\delta,\ a+\delta))$

(C) $f(x)>f(a)(x\in(a,\ a+\delta))$，$f(x)<f(a)(x\in(a-\delta,\ a))$

(D) $f(x)<f(a)(x\in(a,\ a+\delta))$，$f(x)>f(a)(x\in(a-\delta,\ a))$

解　$f'(a)>0$，则 $f(x)$ 在 a 的某邻域内是增函数，

所以 $f(x)<f(a)$，$x\in(a-\delta,\ a)$，$f(x)>f(a)$，$x\in(a,\ a+\delta)$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0,\end{cases}$ 则(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续

(B) $f'(0)$ 存在

(C) $f'(0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处不存在切线

(D) $f'(0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处有切线

解　选(D).

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x-0}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\infty,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x-0}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty,$$ $f_+'(0)\neq f_-'(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在. 但在 $(0,\ 0)$ 存在切线，且切线为 y 轴.

(5) 设 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=f^2(x)$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是(　　).

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　　(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

解　$f'(x)=f^2(x)$，$f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2!f^3(x)$，

$f'''(x)=6f^2(x)\cdot f'(x)=3!f^4(x)$，所以 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$.

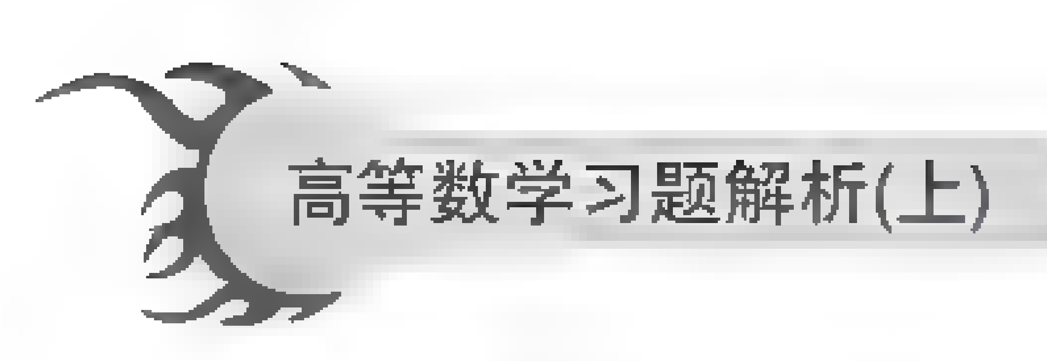
(6) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

解　由可导的定义可知选择(D).

(7) 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记 Δy 为 $f(x)$ 在点 x_0 的增量，$\mathrm{d}y$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}$ 等于(　　).



(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) ∞

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f'(x_0)\Delta x+0(\Delta x)]-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0(\Delta x)}{\Delta x}=0.$

3. 计算题

(1) $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\ln[\cos(10+3x^2)]'=\dfrac{-6x\sin(10+3x^2)}{\cos(10+3x^2)}=-6x\tan(10+3x^2)$.

(2) 设函数 $y=y(x)$是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$确定的，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$，两端对 x 求导数，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y}{x^2},$$

整理可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

(3) 已知$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t,\end{cases}$求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t}{\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg/\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^t\sin t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\dfrac{-2}{(\cos t+\sin t)^2}}{\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}=\frac{-2}{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)^3}.$$

(4) 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 $f'(x)=\dfrac{2x\cdot(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$，$f'(0)=0$，

$f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)^2+8x^2(1-x^2)^2}{(1-x^2)^4}=\dfrac{2+8x^2}{(1-x^2)^2}$，$f''(0)=2$，

由数学归纳法得当 $n=2k$ 时，$f^{(n)}(0)=n!$；当 $n=2k+1$ 时，$f^{(n)}(0)=0$　($k=1,2,3,\cdots$).

第 3 章　微分中值定理和导数的应用

3.1　微分中值定理

3.1.1　知识点概况

1.（费马引理）设函数 $f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导. 如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），那么 $f'(x_0)=0$.

2. 导数等于 0 的点称为函数的驻点(稳定点或临界点).

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义，$x_0\in(a, b)$. 若在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值；若在某 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值. 函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.

4.（罗尔定理）如果函数 $y=f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a, b) 内可导；

(3) 在区间端点函数值相等，即 $f(a)=f(b)$.

那么至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

5. 罗尔定理的几何意义：在每一点都可导的一段连续曲线上，如果曲线的两个端点高度相等，则至少存在一条水平切线.

6.（拉格朗日中值定理）如果函数 $y=f(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a, b) 内可导.

那么至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

7. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 叫做拉格朗日中值公式. 这个公式对于 $b<a$ 也成立. 拉格朗日中值公式还有其他形式. 设 x 为区间 $[a, b]$ 内一点，$x+\Delta x$ 为这区间内的另一点（$\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$），则在 $[x, x+\Delta x]$（$\Delta x>0$）或 $[x+\Delta x, x]$（$\Delta x<0$）应用拉格朗日中值公式，得 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x\ (0<\theta<1)$.

8. 如果函数 $f(x)$在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$在区间 I 上恒为常数.

9.（柯西中值定理）设函数 f 和 F 满足：

(1) 在$[a, b]$上连续；

(2) 在(a, b)内可导；

(3) $F'(x)\neq 0$，对任意的 $x\in(a, b)$.

则存在 $\xi\in(a, b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

3.1.2 习题解答

1. 判断题

(1) 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义，若对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.（　　）

解　错. 函数 $f(x)$不仅要在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义，而且要在 x_0 处可导.

(2) 驻点是二阶导数等于零的点.（　　）

解　错，驻点是一阶导数等于零的点.

(3) 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例.（　　）

解　对.

(4) 如果函数 $f(x)$在区间 I 上连续，I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.（　　）

解　对.

2. 选择题

(1) 下列条件中(　　)不是罗尔定理的条件.

(A) $f(x)$在$[a, b]$上连续　　(B) $f(x)$在$[a, b]$上可积

(C) $f(x)$在(a, b)内可导　　(D) $f(a)=f(b)$

解　选(B).

(2) 设 $a>b>0$，$n>1$，以下结论正确的是(　　).

(A) $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

(B) $nb^{n-1}(a-b)\leqslant a^n-b^n\leqslant na^{n-1}(a-b)$

(C) $nb^{n-1}(a-b)>a^n-b^n>na^{n-1}(a-b)$

(D) $nb^{n-1}(a-b)\geqslant a^n-b^n\geqslant na^{n-1}(a-b)$

解　选(A)，构造函数 $f(x)=x^n$，$(n>1)$，则 $f(x)$在闭区间$[b, a]$上连续，在开区间(b, a)内可导，那么至少存在一点 $\xi\in(b, a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$. 又 $f'(x)=nx^{n-1}$，且 $f'(x)$在$(0, +\infty)$上为增函数. 因为 $b<\xi<a$，所以 $f'(b)<f'(\xi)<f'(a)$，于是 $f'(b)<$

$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<f'(a)$，也就是 $nb^{n-1}<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<na^{n-1}$，即 $nb^{n-1}(a-b)<f(a)-f(b)<na^{n-1}(a-b)$.

(3) 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f'(x)=0$ 有(　　)个根.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解　$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$在闭区间$[1, 2]$上连续，在开区间$(1, 2)$内可导，且 $f(1)=0=f(2)$，根据罗尔定理，存在一点 $\xi_1\in(1, 2)$使得 $f'(\xi_1)=0$. 同理可以得到，存在点 $\xi_2\in(2, 3)$，$\xi_3\in(3, 4)$，使得 $f'(\xi_2)=0$，$f'(\xi_3)=0$. 所以，答案选择(C).

(4) 若$|x|<\frac{1}{2}$，则 $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=($　　$)$.

(A) π　　(B) 2π　　(C) 3π　　(D) 4π

解　设 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，对 $f(x)$进行求导，

得 $f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$，化简可得

$$f'(x)=3\cdot\frac{-\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}+(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$=3\cdot\frac{-\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}+\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}{\sqrt{(1-x^2)[1-(3x-4x^3)^2]}}$$

$$=3\cdot\frac{-\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}+\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}}{\sqrt{(1-x^2)[1-(3x-4x^3)^2]}}$$

$$=0$$

所以，$f(x)$是常数函数. 于是 $f(x)=f(0)=\pi$. 所以答案选(A).

3. 证明题

(1) 设 $a>e$，$0<x<y<\frac{\pi}{2}$，求证：$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a$.

证明　令 $f(t)=a^t$，$g(t)=\cos t$，在区间$[x, y]$上应用柯西中值定理，即知存在满足 $0<x<\xi<y<\frac{\pi}{2}$的 ξ，使得

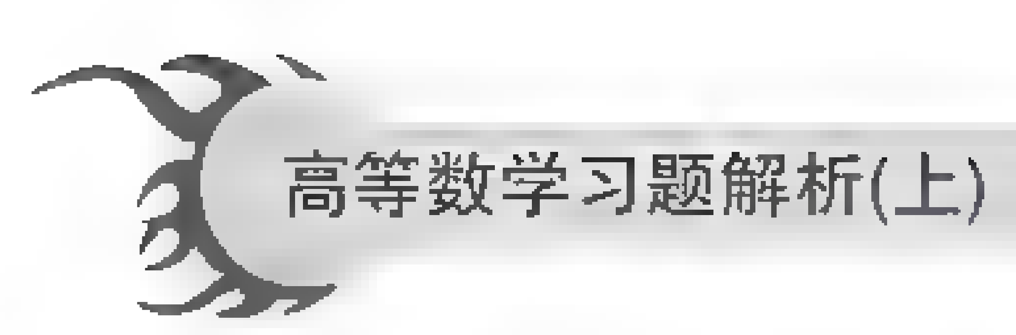
$$\frac{a^y-a^x}{\cos y-\cos x}=\frac{a^\xi\ln a}{-\sin\xi}.$$

即 $a^y-a^x=(\cos x-\cos y)a^\xi\ln a\cdot\frac{1}{\sin\xi}$.

由于 $a^x<a^\xi$，$0<\sin\xi<1$，故由上式可得 $a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a$.

(2) 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在$(0, 1)$内至少有一个实根.

证明　设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$，显然 $f(x)$在$[0, 1]$上连续，$(0, 1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$使得 $f'(\xi)=0$，即方程



$4ax^3+3bx^2+2cx-a+b+c$ 在(0，1)内至少有一个实根.

(3) 已知函数 $f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

① 存在 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

② 存在两个不同的点 η，$\zeta\in(0, 1)$，使得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.

证明 ① 令 $F(x)=f(x)+x-1$，显然 $F(x)$在$[0, 1]$上连续，且

$$F(0)F(1)=[f(0)-1]f(1)=-1<0,$$

所以由零点定理知，存在 $\xi\in(0, 1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

② 利用①的结果，对 $f(x)$在$[0, \xi]$上应用拉格朗日中值定理可知，存在

$$\eta\in(0, \xi)，使得\ f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi} \tag{①}$$

对 $f(x)$在$[\xi, 1]$上应用拉格朗日中值定理可知，存在 $\zeta\in(\xi, 1)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi} \tag{②}$$

于是由式①和式②可得 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.

3.2　洛必达法则

3.2.1　知识点概况

1. 当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在，也可能不存在. 这种极限被称为不定式极限，并分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

2. 设函数 $f(x)$，$F(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$；

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$，$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞.

那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$.

3. 设函数 $f(x)$，$F(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty$；

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$，$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞.

那么 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$.

4. 有一些 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 型的不定式极限，可通过简单变换，化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式极限来计算.

3.2.2　习题解答

1. 判断题

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在.　(　　)

解　对. 但本题不适合洛必达法则. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ 极限不存在.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 可以由洛必达法则求得.　(　　)

解　错，由(1)可知.



(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=1.$ (　　)

解 错，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan2x^2\right)x^2=\dfrac{1}{2}.$ (　　)

解 对，$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan2x^2}{\dfrac{1}{x^2}}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-4x}{1+4x^4}}{-\dfrac{2x}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4}{1+4x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)=\dfrac{2}{3}.$ (　　)

解 对，
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x\sec^2x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\sec^2x-x}{2x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sec^4x+2\tan^2x\sec^2x-1}{6x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sec^4x-1}{6x^2}+\frac{2\tan^2x\sec^2x}{6x^2}\right)\\&=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{4\sec^4x\tan x}{12x}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2. 填空题

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=$ ________.

解 令$\dfrac{1}{x^2}=t$，$x\to0(t\to\infty)$. 则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x^{100}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$，

将上式反复应用洛必达法则，得$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln(\arcsin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\arcsin x)\sin x}{\cos x}}=e^0=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=$ ________.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=$________.

解　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$.

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{\sin x}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x+2x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{3},$$

所以，原式$=e^{-\frac{1}{3}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$________.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

3. 计算题

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x\sin x\tan x}$;

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

解　$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+2x}{-3x^2}=-1$.

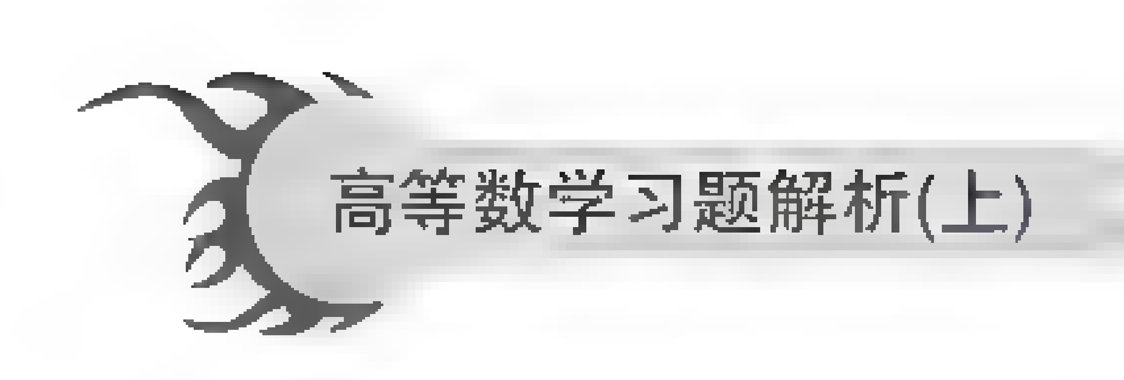
(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}$;

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{(\arcsin x)^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

解　令$t=\dfrac{1}{x^2}$，则$\lim\limits_{x\to0^+}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$.



3.3　函数单调性、曲线的凹凸性与拐点

3.3.1　知识点概况

1.(函数单调性的判定法)设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导.

(1) 如果在(a, b)内 $f'(x)\geqslant 0$，那么函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上单调增加；

(2) 如果在(a, b)内 $f'(x)\leqslant 0$，那么函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上单调减少.

2. 设函数 $f(x)$在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1、x_2，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凹的；如果恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，那么称 $f(x)$在 I 上的图形是凸的.

3.(凹凸性的判定定理)如果函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有一阶和二阶导数，那么：

(1) 若在(a, b)内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的；

(2) 若在(a, b)内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的.

4. 设 $y=f(x)$在区间 I 上连续，x_0 是 I 内的点.如果曲线 $y=f(x)$在经过点$(x_0, f(x_0))$时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点$(x_0, f(x_0))$为曲线的拐点.

5. 确定曲线 $y=f(x)$拐点的步骤：

(1) 求出二阶导数 $f''(x)$；

(2) 求使得 $f''(x)=0$ 的点或使得二阶导数不存在的点 x_0；

(3) 用 x_0 划分函数 $f(x)$的定义域，并考察 $f''(x)$在 x_0 左、右两侧的符号.当两侧符号相反时，点$(x_0, f(x_0))$是拐点；当两侧符号相同时，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

3.3.2　习题解答

1. 判断题

(1) $f(x)=e^x-x+1$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调增加.　(　　)

解　错.$f'(x)=e^x-1$，且 $f'(x)=0$ 时 $x=0$，又当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$；所以 $f'(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$[0, \infty)$上单调递增.

(2) 函数的单调性与一阶导数有关系.　(　　)

解　对.

(3) 函数的凹凸性与二阶导数有关系.　(　　)

解　对.

(4) $f(x)=x^4$ 有拐点.　(　　)

解　错．因为 $f''(x)=12x^2>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 不存在拐点．

2. 选择题

(1) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x)>0$，以下结论正确的是(　　).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

解　因为 $f''(x)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导；

则由微分中值定理可知，存在一点 $\xi\in[0, 1]$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0);$$

又 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $x\in[0, 1]$ 上为增函数；

所以 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$，选(B).

(2) 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f''(x)>0$，$f(0)\leqslant 0$，则 $\frac{f(x)}{x}$ (　　).

(A) 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

(B) 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 内单调减少

(C) 在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加，在 $(0, +\infty)$ 内单调减少

(D) 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 内单调增加

解　令 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$

且已知 $f''(x)>0$，所以当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$. $g(0)=0\times f'(0)-f(0)=-f(0)\geqslant 0$；所以 $g(x)\geqslant g(0)\geqslant 0$，则 $F'(x)\geqslant 0$；所以 $F(x)$ 即 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 内单调递增. 选(D).

(3) 以下关于 $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的凹凸性结论正确的是(　　).

(A) $y=\ln x$ 不凹也不凸　　　　(B) $y=\ln x$ 既是凹的也是凸的

(C) $y=\ln x$ 是凸的　　　　(D) $y=\ln x$ 是凹的

解　$y''=-\frac{1}{x^2}$，$y''<0$.

所以 $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 选(C).

(4) $y=x^3$ 共有(　　)个拐点.

(A) 0　　　　(B) 1　　　　(C) 2　　　　(D) 3

解析　$y''=6x$，当 $y''=0$ 时，$x=0$. 且当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$；所以点 $(0, 0)$ 是拐点. 选(B).

3. 填空题

(1) 若 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y=$

$f(x)$的________.

解 拐点.

(2) $y=(x+1)^4+e^x$ 有________个拐点.

解 $y''=12(x+1)^2+e^x>0$ 恒成立，所以 $y=(x+1)^4+e^x$ 无拐点.

(3) 若点$(x_0, f(x_0))$为 $y=f(x)$的拐点，则 $f''(x_0)$不存在或________.

解 $f''(x_0)=0$.

(4) $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$的拐点是________.

解 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$的定义域为$\{x|x\neq\pm1\}$，且 $y''=\dfrac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$；令 $y''=0$，则 $x=0$，故拐点为$(0, 0)$.

4. 判断函数 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的凹凸性，并求该函数曲线的拐点.

解 易求得 $y'=3x^2-10x+3$，$y''=6x-10=6\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$.

令 $y''=6x-10=6\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=0$，得 $x=\dfrac{5}{3}$.

当 $x<\dfrac{5}{3}$时，$y''<0$，从而函数在$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$上是凸的；

当 $x>\dfrac{5}{3}$时，$y''>0$，从而函数在$\left[\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$上是凹的.

又当 $x=\dfrac{5}{3}$时，$y=\dfrac{20}{27}$，从而$\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{20}{27}\right)$为拐点.

5. 证明题

(1) 当 $x>0$，$a<1$ 时，求证：$1+x\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})>\sqrt{a^2+x^2}$.

证明 令 $f(t)=1+t\ln(t+\sqrt{a^2+t^2})-\sqrt{a^2+t^2}$，$t\in[0, x]$.

$$f'(t)=\ln(t+\sqrt{a^2+t^2})+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}=\ln(t+\sqrt{a^2+t^2})>0,\ t\in(0, x).$$

因此，$f(t)$在$[0, x]$上单调递增，所以 $f(x)>f(0)$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\sqrt{a^2+x^2}>1+0-a>0,$$

亦即 $1+x\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})>\sqrt{a^2+x^2}\ (x>0, a<1)$.

(2) 证明：$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y)$.

证明 设 $f(t)=e^t$，$t\in(-\infty, +\infty)$，则有 $f'(t)=f''(t)=e^t>0$，$t\in(-\infty, +\infty)$. 因此 $f(t)$在$(-\infty, +\infty)$内是凹的，故对任意的 x，$y\in(-\infty, +\infty)$，$x\neq y$，有$\dfrac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，即$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\ (x\neq y)$.

3.4　函数的极值与最值

3.4.1　知识点概况

1. 函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$是函数 $f(x)$的一个极大值，那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说，$f(x_0)$是 $f(x)$的一个最大值；如果就 $f(x)$的整个定义域来说，$f(x_0)$不一定是最大值. 关于极小值也类似.

2.（可导函数取极值的必要条件）设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么函数 $f(x)$在 x_0 处的导数为零，即 $f'(x_0)=0$.

3.（极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，在某$\mathring{U}(x_0, \delta)$内可导.

(1) 若 $x\in(x_0-\delta, x_0)$时 $f'(x)>0$，而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$时 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值；

(2) 若 $x\in(x_0-\delta, x_0)$时 $f'(x)<0$，而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$时 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值；

(3) 若 $x\in\mathring{U}(x_0, \delta)$时 $f'(x)$的符号保持不变，那么函数 $f(x)$在 x_0 处没有极值.

4. 确定极值点和极值的步骤：

(1) 求出导数 $f'(x)$；

(2) 求出 $f(x)$的全部驻点和不可导点；

(3) 考察 $f'(x)$的符号在每个驻点和不可导点的左、右邻近的情况，按极值的第一充分条件判断极值点；

(4) 求出函数的极值点处的函数值，即算出极值.

5.（极值的第二充分条件）设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，那么：

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值.

6. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则函数的最大值和最小值一定存在. 其最大值和最小值的求法如下：设 $f(x)$在(a, b)内的驻点和不可导点(它们是可能的极值点)为 x_1，x_2，…，x_n，则比较 $f(a)$，$f(x_1)$，…，$f(x_n)$，$f(b)$的大小，其中最大的便是函数 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值，最小的便是函数 $f(x)$在$[a, b]$上的最小值.

3.4.2 习题解答

1. 判断题

(1) 函数的极大值和极小值的概念不是局部性的. (　　)

解：错，是局部性的.

(2) 函数的驻点必是极值点. (　　)

解：错，如 $y=x^3$ 的驻点就不是极值点.

(3) 函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值. (　　)

解　对. 如 $y=|x|$ 在其导数不存在的点 0 处取得极值.

(4) 可导函数的极值点必是其驻点 . (　　)

解　对.

2. 选择题

(1)设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则(　　).

(A) $f'(x_0)\neq 0$　　(B) $f'(x_0)=0$　　(C) $f''(x_0)=0$　　(D) $f''(x_0)\neq 0$

解　选(B).

(2) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则(　　).

(A) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值

(B) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值

(C) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得最大值

(D) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在点 x_0 处取得最小值

解　选(A)，$f''(x_0)<0$ 说明导函数在 x_0 左侧递减，而 $f'(x_0)=0$，则导函数在 x_0 左侧大于 0，右侧小于 0，说明 x_0 为 $f(x)$的极大值点.

(3) 设 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，点(0，3)是拐点，则(　　).

(A) $a=0$，$b=-1$，$c=3$　　(B) $a=-1$，$b=0$，$c=3$

(C) $a=3$，$b=-1$，$c=0$　　(D) 以上都错

解　选(A)，$y'=3x^2+6ax+3b$，$y''=6x+6a$，

$$\begin{cases} f(-1)=3-6a+3b=0, \\ f(0)=c=3, \\ f''(0)=6a=0, \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=3. \end{cases}$$

3. 填空题

(1) 函数的极大值与极小值统称为函数的________，使函数取得极值的点称为________.

解　极值，极值点.

(2) 函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极大值是________，极小值是________.

解　$f'(x)=6x^2-18x+12$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，$x=2$. 故 $x=1$ 取极大值 2，$x=2$

取极小值 1.

(3) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的极大值为________.

解　对数求导法得 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)$，可得出极大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

(4) 函数 $y=x+\frac{x}{x^2-1}$ 的极大值是________，极小值是________.

解　$y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$，可得出极大值为 $f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，极小值为 $f(-\sqrt{3})=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$.

4. 计算题

(1) 求 $f(x)=2x-\ln(1+x)$ 的极值.

解　明显地，函数 $f(x)=2x-\ln(1+x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$.

易求得 $f'(x)=2-\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x=0$.

由 $f''(0)=1>0$ 知 $f(0)=0$ 为极小值.

(2) 求 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 在 $[1,4]$ 上的最值.

解　易求得 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$(舍去)或 $x=3$.

比较 $f(1)=-29$，$f(3)=-61$，$f(4)=-47$，易知函数的最大值、最小值分别是 $f(1)=-29$，$f(3)=-61$.

(3) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入有最大面积的、四边平行于椭圆轴的矩形，求该矩形的最大面积.

解　设椭圆内接矩形在第一象限中的顶点为 $M(x,y)$，则矩形的面积为

$$S(x)=4xy=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2},\ (0\leqslant x\leqslant a).$$

易求得 $S'(x)=\frac{4b}{a}\cdot\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$，令 $S'(x)=0$，解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

比较 $S(0)=S(a)=0$，$S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$ 可知最大面积为 $2ab$.

3.5 总习题解答

1. 判断题

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(|x|\leqslant 1)$. ( )

解 对. $(\arcsin x+\arccos x)'=0$，令 $x=1$，$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\sin a$. ( )

解 错. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$.

(3) 函数图形的凹凸性与三阶导数有关. ( )

解 错. 函数的凹凸性与二阶导数有关.

(4) 极大值就是最大值. ( )

解 错. 极大值不一定是最大值，极大值是局部最大值，但不是整个区域的最大值.

2. 选择题

(1) 设 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 在$[-1,2]$上的最大值为3，最小值为-29，又知 $a>0$，则( ).

(A) $a=2$，$b=-29$

(B) $a=2$，$b=3$

(C) $a=3$，$b=2$

(D) 以上都不对

解 选(B). $f'(x)=3ax^2-12ax$

令 $f'(x)=0$，则 $x_1=0$，$x_2=4$(舍).

则 $f'(x)>0$，$x\in[-1,0]$；$f'(x)<0$，$x\in[0,2]$.

所以 $f(x)$在 $x=0$ 时取最大值，即 $f(0)=b=3$.

$f(x)$在 $x=-1$ 或 $x=2$ 时取最小值，

所以 $f(-1)=-a-6a+3=-29$，即 $a=\frac{32}{7}$；

$f(2)=8a-24a+3=-29$，即 $a=2$.

所以 $a=2$，$b=3$.

(2) 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处取得极大值，则( ).

(A) $f'(x_0)=0$

(B) $f''(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$

(D) $f'(x_0)=0$ 或不存在

解 选(D).

3. 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

解　根据洛必达法则知，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[1-x^x(\ln x+1)]}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-[x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}]}{-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{-(1+1)}{-1}=2.$

4. 计算题

(1) 将长为 a 的一段铁丝截成两段，用一段围成圆，另一段围成正方形，为使两段面积之和最小，问两段铁丝各长多少.

解　设围成圆的铁丝长为 x，则围成正方形的铁丝长为 $a-x$，于是圆的半径 $r=\dfrac{x}{2\pi}$，正方形边长为$\dfrac{a-x}{4}$，所以两段面积和为 $S(x)=\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\dfrac{a-x}{4}\right)^2$，$x\in(0,a)$.

易求得 $S'(x)=\dfrac{4+\pi}{8\pi}\left(x-\dfrac{\pi a}{4+\pi}\right)$，令 $S'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$.

又求得 $S''(x)=\dfrac{4+\pi}{8\pi}>0$，所以当 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$时满足题意.

因此两段铁丝的长度分别是$\dfrac{\pi a}{4+\pi}$和 $a-\dfrac{\pi a}{4+\pi}=\dfrac{4a}{4+\pi}$.

(2) 求 $f(x)=x^4(12\ln x-7)$的凹凸区间及拐点.

解　明显地，$f(x)=x^4(12\ln x-7)$的定义域是$(0,+\infty)$.

易求得 $f'(x)=4x^3(12\ln x-4)$，$f''(x)=144x^2\ln x$.

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$时，$f''(x)<0$，因此曲线在$(0,1)$上是凸的.

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f''(x)>0$，因此曲线在$(1,+\infty)$上是凹的.

又 $f(1)=-7$，所以曲线的拐点是$(1,-7)$.

(3) 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geqslant0)$的最大值.

解　易求得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$(舍去)，$x=1$.

由 $f''(1)=-\dfrac{1}{2}<0$ 知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geqslant0)$在 $x=1$ 处取得唯一的极大值.

所以函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(x\geqslant0)$在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

第4章 不定积分

4.1 不定积分的概念与性质

4.1.1 知识点概况

1. 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$（或 $f(x)\mathrm{d}x$）在区间 I 上的原函数.

2. （原函数存在定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上 $f(x)$ 的原函数一定存在，即存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x\in I$ 都有 $F'(x)=f(x)$.

3. 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$（或 $f(x)\mathrm{d}x$）在区间 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，C 称为积分常数.

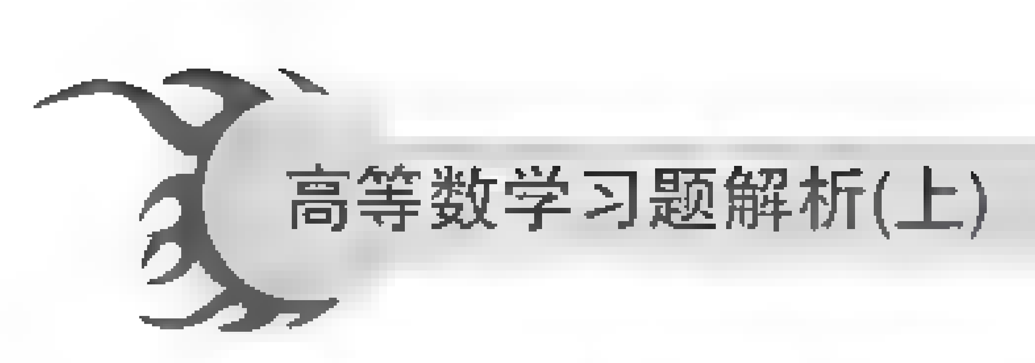
根据定义，可知不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数，求解不定积分就是找原函数的过程.

4. 通常我们把函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线，它的方程为 $y=F(x)$，所以不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上就表示积分曲线族，它的方程为 $y=F(x)+C$，其中 C 是任意常数. 将 $y=F(x)$ 的图像沿 y 轴方向上下平移，就得到积分曲线族 $y=F(x)+C$ 的图像，每一条曲线在横坐标相同点的切线斜率均相同，即切线均平行.

5. 从不定积分的定义可得不定积分与导数或微分之间有下述关系：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$，即 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，或记作 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.



由此可见，微分运算(以记号 d 表示)与求不定积分的运算(简称积分运算，以记号 $\int$ 表示)是互逆的，当记号 $\int$ 与 d 连在一起时，如果 $\int$ 在 d 前面，则符号相互抵消后，差一个常数；如果 d 在 $\int$ 前面，则符号相互抵消，剩下被积表达式；$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 与 $\int$ 抵消后剩下被积函数.

6. 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x.$$

上述等式可推广到多个函数的情形.

7. 设函 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x(k\text{ 是常数},k\neq 0).$$

8. 不定积分的基本积分表：

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C(k$ 是常数)；

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$，$(\mu\neq-1)$；

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

(4) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$；

(5) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$；

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

(8) $\int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

(9) $\int \frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

(10) $\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$；

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$；

(12) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

(13) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

(14) $\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$；

(15) $\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$.

4.1.2 习题解答

1. 求下列不定积分：

知识点 考察利用直接积分法求不定积分.

解题思路 利用不定积分的运算性质和基本积分公式求不定积分.

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$；

思路 被积函数$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$，由不定积分的基本积分表中公式(2)可解.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int x^{-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-x^{-1}+C.$

(2) $\int 2x^4\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$；

思路 被积函数 $2x^4\sqrt[3]{x}=2x^{\frac{13}{3}}$，由不定积分的性质 2 与基本积分表中公式(2)可解.

解 $\int 2x^4\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=2\int x^{\frac{13}{3}}\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{\frac{13}{3}+1}x^{\frac{13}{3}+1}+C=\frac{3}{8}x^{\frac{16}{3}}+C.$

(3) $\int (x^3+2)^2\mathrm{d}x$；

思路 被积函数$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4$，由不定积分的性质 1、性质 2 与基本积分表中公式(1)和(2)可解.

解 $\int (x^3+2)^2\mathrm{d}x=\int (x^6+4x^3+4)\mathrm{d}x=\frac{x^7}{7}+x^4+4x+C.$

(4) $\int \frac{(1+x)^2}{5\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

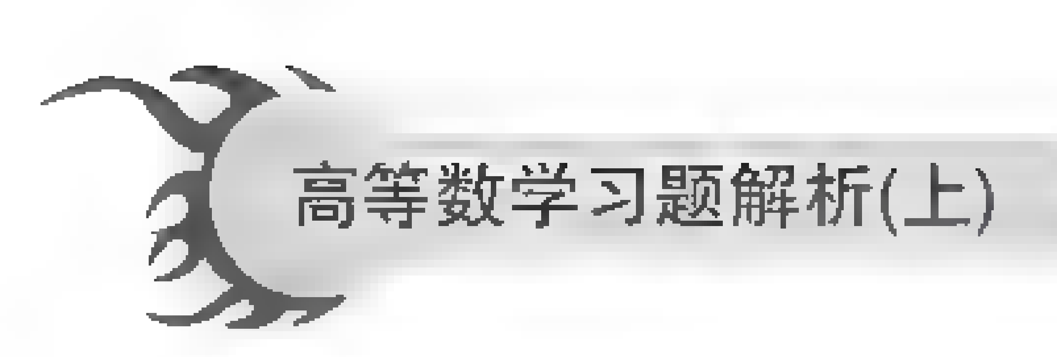
思路 将被积函数变形为$\frac{(1+x)^2}{5\sqrt{x}}=\frac{1}{5}(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$. 由不定积分的性质 1、性质 2 与基本积分表中公式(1)和(2)可解.

解 $\int \frac{(1+x)^2}{5\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int (x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{25}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{15}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}+C.$

(5) $\int \left(\mathrm{e}^x+\frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x$；

思路 由不定积分的性质 1、性质 2 与基本积分表中公式(3)和(4)可解.

解 $\int \left(\mathrm{e}^x+\frac{5}{x}\right)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+5\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+5\ln|x|+C.$



(6) $\int\left(\frac{4}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

思路 由不定积分的性质1、性质2与基本积分表中公式(10)和(11)可解.

解 $\int\left(\frac{4}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\arctan x+3\arcsin x+C.$

(7) $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

思路 利用指数函数的性质 $2^x\mathrm{e}^x=(2\mathrm{e})^x$，由基本积分表中公式(5)可解.

解 $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln 2+1}+C.$

(8) $\int\mathrm{e}^x\left(2+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

思路 将被积函数整理为 $\mathrm{e}^x\left(2+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)=2\mathrm{e}^x+x^{-\frac{1}{2}}$，由不定积分的性质1、性质2与基本积分表中公式(2)和(4)可解.

解 $\int\mathrm{e}^x\left(2+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=2\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}^x+\sqrt{x})+C.$

(9) $\int\frac{3^x-4^x}{2^x}\mathrm{d}x$;

思路 将被积函数变形为 $\frac{3^x-4^x}{2^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x+2^x$，由不定积分的性质1与基本积分表中公式(5)可解.

解 $\int\frac{3^x-4^x}{2^x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{2}\right)^x\mathrm{d}x+\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln 3-\ln 2}+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$

(10) $\int\sec x(\tan x+\sec x)\mathrm{d}x$;

思路 由基本积分表中公式(8)与(12)可解.

解 $\int\sec x(\tan x+\sec x)\mathrm{d}x=\int\sec x\tan x\mathrm{d}x+\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\sec x+\tan x+C.$

(11) $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

思路 利用半角公式 $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$，由不定积分的性质与基本积分表中公式(1)和(6)可解.

解 $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x-\sin x}{2}+C.$

(12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$;

思路 利用倍角公式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，由基本积分表中公式(8)可解.

解 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{\tan x}{2}+C.$

(13) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；

思路 利用倍角公式 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$，将被积函数化简为 $\cos x+\sin x$，由基本积分表中公式(6)和(7)可解.

解 $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$

(14) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$；

思路 利用倍角公式 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$，将被积函数变形为$\csc^2 x-\sec^2 x$，由基本积分表中公式(8)和(9)可解.

解 $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx=-(\cot x+\tan x)+C$

(15) $\displaystyle\int\cot^2 x dx$；

思路 利用倍角公式 $1+\cot^2 x=\csc^2 x$，由基本积分表中公式(1)与(9)可解.

解 $\displaystyle\int\cot^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-(\cot x+x)+C$

(16) $\displaystyle\int\tan^2 x dx$；

思路 利用倍角公式 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$，由基本积分表中公式(1)与(8)可解.

解 $\displaystyle\int\tan^2 x dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C.$

(17) $\displaystyle\int\frac{2x^4+3x^2}{x^2+1}dx$；

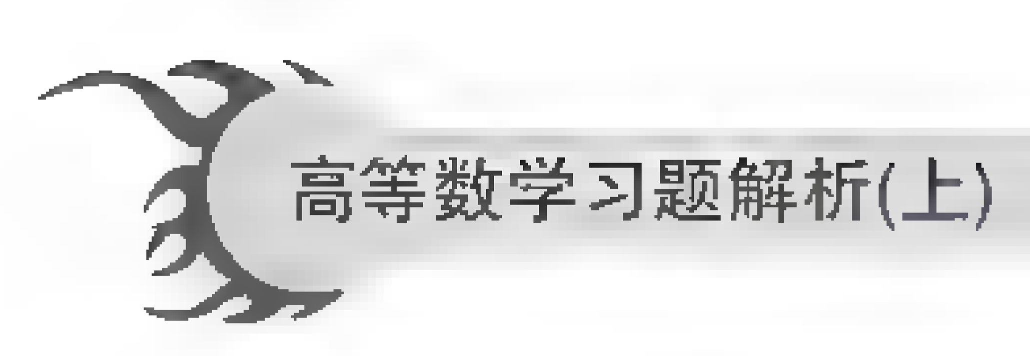
思路 将被积函数变形为$\dfrac{2x^4+3x^2}{x^2+1}=2x^2+1-\dfrac{1}{x^2+1}$，由不定积分的性质与基本积分表中公式(1)、(2)和(10)可解.

解 $\displaystyle\int\frac{2x^4+3x^2}{x^2+1}dx=\int\left(2x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{2}{3}x^3+x-\arctan x+C.$

2. 求下列微分方程满足所给条件的解：

知识点 含有未知函数的导数的方程称为微分方程，例如，方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$，其中$\dfrac{dy}{dx}$为未知函数的导数，$f(x)$为已知函数. 若将函数 $y=F(x)$代入微分方程，使微分方程成为恒等式，则此函数称为微分方程的解. 满足初始条件的解成为特解.

解题思路 对方程右边的函数求不定积分，然后代入初始条件求出常数 C 的值.



(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^3+1$，$y|_{x=0}=1$；

解 $y=\int(x^3+1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+x+C$，由 $y|_{x=0}=1$，得 $C=1$，故微分方程满足初始条件的解为 $y=\dfrac{x^4}{4}+x+1$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{x^4}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=1$，$y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\int\dfrac{3}{x^4}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x^3}+C_1$，由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=1$，得 $C_1=2$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{x^3}+2$. 于是

$y=\int\left(-\dfrac{1}{x^3}+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x^2}+2x+C_2$，再由 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，得 $C_2=-2$，故微分方程满足初始条件的解为 $y=\dfrac{1}{2x^2}+2x-2$.

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(e^3, 5)$，且曲线上任意一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求此曲线的方程.

解 由已知得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故 $f(x)=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$. 又因为曲线过点 $(e^3, 5)$，所以有 $5=\ln e^3+C$，故 $C=2$，因此所求曲线方程为 $f(x)=\ln x+2$.

4.2 换元积分法

4.2.1 知识点概况

1. 设 $f(u)$有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

利用上述公式求积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 时，如果函数 $g(x)$可以凑成 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，令 $u=\varphi(x)$进行换元，求出 $f(u)$的不定积分，再把 $u=\varphi(x)$代回，那么

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

这种积分法称为第一类换元积分法，由于具体操作时需要凑成复合函数关于中间变量的微分形式，故又称凑微分法.

2. 一般地，对于$\sin^{2k+1}x\cos^n x$ 或$\sin^n x\cos^{2k+1}x$(其中 $k\in\mathbf{N}$)型函数的积分，总可依次做变换 $u=\cos x$ 或 $u=\sin x$ 求得结果. 其特点是被积函数中均包含 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的奇次幂项，将其假设为 u，其余部分可使用三角恒等式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 进行变换.

3. 一般地，对于$\sin^{2k}x\cos^{2l}x$(其中 k，$l\in\mathbf{N}$)型函数的积分，总可利用三角恒等式$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$化成 $\cos 2x$ 的多项式，做变换 $u=\cos 2x$ 求得结果.

4. 一般地，对于$\tan^n x\sec^{2k}x$ 或$\tan^{2k-1}x\sec^n x$(其中 $k\in\mathbf{N}_+$)型函数的积分，可依次做变换 $u=\tan x$ 或 $u=\sec x$，利用三角恒等式$\tan^2 x+1=\sec^2 x$ 求得结果.

5. 除了利用上述三种三角恒等式之外，还有一些其他的三角关系式可以利用，如半角公式、三角函数“积化和差”公式等.

半角公式如下：

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}.$$

积化和差公式如下：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

6. 常用的几种凑微分的形式：

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$；

(2) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$；

(3) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$；

(4) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$；

(5) $\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

(6) $\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$；

(7) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

(8) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$；

(9) $\int f(\tan x)\sec x^2\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$；

(10) $\int f(\cot x)\csc x^2\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$；

(11) $\int \frac{f(\arctan x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$；

(12) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

7. 设 $x=\varphi(t)$是单调、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$. 又设 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$具有原函数 $F(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$的反函数.

8. 对被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$的情形，可考虑直接对简单根式进行代换，进而将被积表达式转化为有理式.

9. 当被积函数为分式形式时，且分母形式较为复杂，可采用倒代换，即 $x=\frac{1}{t}$进行代换；如果被积函数存在多个指数函数，且结构相似时，可采用指数代换，即 $a^x=t$ 进行代换．这样的代换可以简化分母形式，便于化简被积函数，从而求出不定积分.

10. 当被积函数出现 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$形式时，可采用三角代换，利用三角

恒等式将根式去掉.

11. 通过对第二类换元积分法的学习，补充如下不定积分公式：

(1) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；

(2) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

(3) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

(4) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

(5) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(6) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

4.2.2 习题解答

1. 在横线上填入适当的系数，使下列等式成立：

(1) $\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(kx)$；

解 因为 $\mathrm{d}(kx)=k\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\mathrm{d}(kx)$.

(2) $\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(5x+2)$；

解 因为 $\mathrm{d}(5x+2)=5\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}(5x+2)$.

(3) $x^2\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(x^3)$；

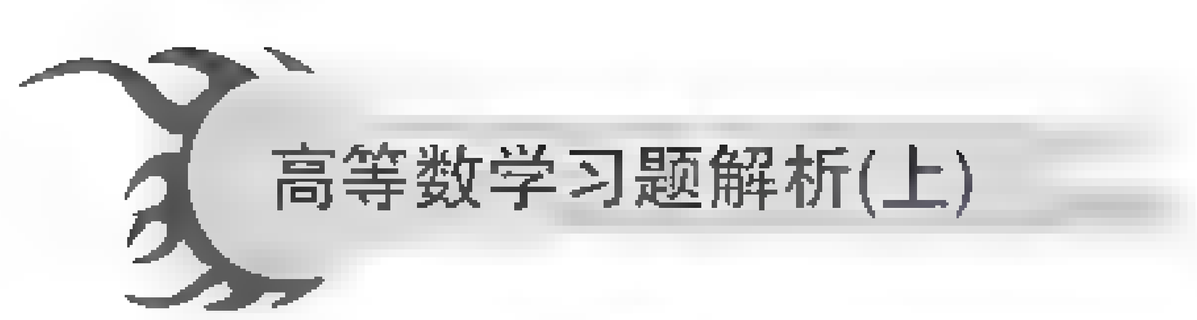
解 因为 $\mathrm{d}(x^3)=3x^2\mathrm{d}x$，所以 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)$.

(4) $x\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(2-6x^2)$；

解 因为 $\mathrm{d}(2-6x^2)=-12x\mathrm{d}x$，所以 $x\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}\mathrm{d}(2-6x^2)$.

(5) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$；

解 因为 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})=3\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$.



(6) $e^{\frac{3x}{5}}dx=$________$d(7-e^{\frac{3x}{5}})$；

解 因为 $d(7-e^{\frac{3x}{5}})=\frac{3}{5}e^{\frac{3x}{5}}dx$，所以 $e^{\frac{3x}{5}}dx=\frac{5}{3}d(7-e^{\frac{3x}{5}})$.

(7) $\cos\frac{x}{2}dx=$________$d\left(\sin\frac{x}{2}\right)$；

解 因为 $d\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx$，所以 $\cos\frac{x}{2}dx=2d\left(\sin\frac{x}{2}\right)$.

(8) $\frac{1}{x}dx=$________$d(\ln x^2)$；

解 因为 $d(\ln x^2)=d(2\ln|x|)=\frac{2}{x}dx$，所以 $\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}d(\ln x^2)$.

(9) $\frac{dx}{1+4x^2}=$________$d(\arctan 2x)$；

解 因为 $d(\arctan 2x)=\frac{2}{1+4x^2}dx$，所以 $\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}d(\arctan 2x)$.

(10) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$________$d(2-5\arcsin x)$；

解 因为 $d(2-5\arcsin x)=-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$，

所以 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{5}d(2-5\arcsin x)$.

(11) $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$________$d(\sqrt{1-x^2})$.

解 因为 $d(\sqrt{1-x^2})=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，所以 $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-3d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 用第一类换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int(2-5x)^3dx$；

思路 利用 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$ 可解.

解 $\int(2-5x)^3dx=-\frac{1}{5}\int(2-5x)^3d(2-5x)=-\frac{1}{20}(2-5x)^4+C$.

(2) $\int\frac{dx}{4-x}$；

思路 利用 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$ 可解.

解 $\int\frac{dx}{4-x}=-\int\frac{d(4-x)}{4-x}=-\ln|4-x|$.

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$；

思路　利用$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$可解.

解　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x}}=-\frac{1}{2}\int (3-2x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3-2x)=-\sqrt{3-2x}+C.$

(4) $\int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t$；

思路　利用$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$可解.

解　$\int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}(4t)=\frac{\mathrm{e}^{4t}}{4}+C.$

(5) $\int \sin 3x\mathrm{d}x$；

思路　利用$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$可解.

解　$\int \sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \sin 3x\mathrm{d}(3x)=-\frac{\cos 3x}{3}+C.$

(6) $\int \left(\cos\frac{x}{a}-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\right)\mathrm{d}x$；

思路　利用$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$可解.

解　$$\int \left(\cos\frac{x}{a}-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\right)\mathrm{d}x=\int \cos\frac{x}{a}\mathrm{d}x-\int \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}x=a\int \cos\frac{x}{a}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)-b\int \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$=a\sin\frac{x}{a}-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C.$$

(7) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

思路　利用$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$可解.

解　$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}=-\cos\sqrt{x}+C.$

(8) $\int x^2\mathrm{e}^{3x^3}\mathrm{d}x$；

思路　利用$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$可解.

解　$\int x^2\mathrm{e}^{3x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int \mathrm{e}^{3x^3}\mathrm{d}(3x^3)=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x^3}+C.$

(9) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$；

思路　利用$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$可解.



解 $\int x\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int \sin(x^2)d(x^2)=-\frac{\cos x^2}{2}+C.$

(10) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx$;

思路 利用 $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$ 可解.

解 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx=\frac{1}{3}\int (x^3+5)^{-\frac{1}{2}}d(x^3+5)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+5}+C.$

(11) $\int \frac{x^6}{x^7+2}dx$;

思路 利用 $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$ 可解.

解 $\int \frac{x^6}{x^7+2}dx=\frac{1}{7}\int \frac{d(x^7+2)}{x^7+2}=\frac{1}{7}\ln|x^7+2|+C.$

(12) $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$;

思路 利用 $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$ 可解.

解 $\int \frac{dx}{(x-1)^2}=\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+C.$

(13) $\int \sin^2(2x+5)\cos(2x+5)dx$;

思路 利用 $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d(\sin x)$ 可解.

解 $\int \sin^2(2x+5)\cos(2x+5)dx=\frac{1}{2}\int \sin^2(2x+5)d\sin(2x+5)=\frac{\sin^3(2x+5)}{6}+C.$

(14) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$;

思路 利用 $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d(\sin x)$ 可解.

解 $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx=\int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x}=-\frac{1}{3\sin^3 x}+C.$

(15) $\int \sqrt{\sin x+\cos x}(\sin x-\cos x)dx$;

思路 因为 $d(\sin x+\cos x)=(\cos x-\sin x)dx$，利用第一换元积分法可解.

解
$$\int \sqrt{\sin x+\cos x}(\sin x-\cos x)dx=-\int \sqrt{\sin x+\cos x}\,d(\sin x+\cos x)$$
$$=-\frac{2}{3}(\sin x+\cos x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(16) $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$;

思路 因为 $d(x\ln x)=(\ln x+1)dx$，利用第一换元积分法可解.

解 $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx=\int \frac{1}{x\ln x}d(x\ln x)=\ln|x\ln x|+C.$

(17) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$；

思路 因为 $d(\ln\ln x)=\frac{dx}{x\ln x}$，利用第一换元积分法可解.

解 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C.$

(18) $\int \tan^2 x\sec^2 x dx$；

思路 利用 $\int f(\tan x)\sec x^2 dx=\int f(\tan x)d(\tan x)$ 可解.

解 $\int \tan^2 x\sec^2 x dx=\int \tan^2 x d\tan x=\frac{\tan^3 x}{3}+C.$

(19) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\sqrt{1-x^2}}$；

思路 利用 $\int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int f(\arccos x)d(\arccos x)$ 可解.

解 $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{d(\arccos x)}{(\arccos x)^3}=\frac{1}{2(\arccos x)^2}+C.$

(20) $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

思路 利用 $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$ 可解.

解 $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int 2^{\arcsin x}d(\arcsin x)=\frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2}+C.$

(21) $\int \cot\sqrt{1+x^3}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$；

思路 因为 $d(\sqrt{1+x^3})=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx$，利用凑微分法与补充不定积分公式(17)可解.

解 $\int \cot\sqrt{1+x^3}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{2}{3}\int \cot\sqrt{1+x^3}d(\sqrt{1+x^3})=\frac{2}{3}\ln\left|\sin\sqrt{1+x^3}\right|+C.$

(22) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

思路 因为 $d(\arctan\sqrt{x})=\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$，利用凑微分法可解.

解 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$



(23) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$；

思路 利用二倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 与补充不定积分公式(19)可解.

解 $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\int \csc 2x d(2x)=\frac{1}{2}\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C.$

(24) $\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx$；

思路 因为 $d(\ln\tan x)=\frac{dx}{\sin x\cos x}$，由第一换元积分法可解.

解 $\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}dx=\int \ln\tan x d(\ln\tan x)=\frac{(\ln\tan x)^2}{2}+C.$

(25) $\int \cos^3 x dx$；

思路 利用三角公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 与 $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d(\sin x)$可解.

解 $\int \cos^3 x dx=\int \cos^2 x\cos x dx=\int (1-\sin^2 x)d(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$

(26) $\int \sin 3x\sin 4x dx$；

思路 利用积化和差公式 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$与凑微分法可解.

解 $\int\sin 3x\sin 4x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 7x-\cos x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}\int\cos 7x d(7x)-\int\cos x dx\right]$

$=\frac{\sin 7x}{14}-\frac{\sin x}{2}+C.$

(27) $\int \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}dx$；

思路 利用积化和差公式 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$与凑微分法可解.

解 $\int \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin\frac{7x}{12}-\sin\frac{x}{12}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{7}\int\sin\frac{7x}{12}d\left(\frac{7x}{12}\right)-12\int\sin\frac{x}{12}d\left(\frac{x}{12}\right)\right]$

$=-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}+6\cos\frac{x}{12}+C.$

(28) $\int \cot^3 x\csc x dx$；

思路 利用三角恒等式 $1+\cot^2 x=\csc^2 x$ 与 $d(\csc x)=-\cot x\csc x dx$ 可解.

解 $\int \cot^3 x\csc x dx=-\int(\csc^2 x-1)d(\csc x)=-\frac{\csc^3 x}{3}+\csc x+C.$

(29) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

思路 将被积函数的分子与分母同乘以 e^x，因为 $d(e^x)=e^x dx$，利用第一换元积分公式与基本积分公式(10)可解.

解 $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1}=\arctan e^x+C.$

(30) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$;

思路 将被积函数写成 $\frac{1+x}{\sqrt{1-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}$，利用凑微分法与基本积分公式(11)和 $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$ 可解.

解
$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-3x^2}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}+\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}-\frac{1}{6}\int \frac{d(1-3x^2)}{\sqrt{1-3x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(\sqrt{3}x)-\frac{1}{3}\sqrt{1-3x^2}+C.$$

(31) $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$;

思路 利用有理分式除法将被积函数写成 $\frac{x^3}{1+x^2}=x+\frac{x}{1+x^2}$，利用基本积分公式与凑微分法可解.

解
$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx=\int \left(x+\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\int xdx+\int \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

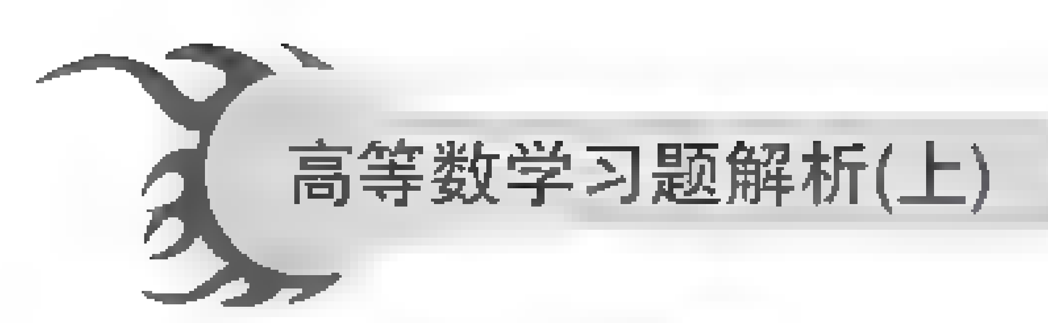
(32) $\int \frac{dx}{x^2-1}$;

思路 将被积函数写成 $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$，利用凑微分法与基本积分公式可解.

解
$$\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int \frac{d(x-1)}{x-1}-\int \frac{d(x+1)}{x+1}\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

(33) $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$;

思路 将分母写成 $x^4+2x^2+5=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2+1\right]$，因为 $d\left(\frac{x^2+1}{2}\right)=xdx$，利用第一换



元积分法求解.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}{1+\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+C.$

(34) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin2x+2\sin x}$;

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin2x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2}\right]+C.$$

(35) $\int\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}$;

思路 利用三角公式将被积函数整理为$\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}=2\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}+\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}$，然后再用凑微分法求解.

解 $\int\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{e}^x\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\left[2\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}+\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\left[\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^x\right]=\int\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(36) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$(其中 $a-b\neq k\pi$);

思路 利用两角差的正弦公式 $\sin(A+B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$，然后再用凑微分法求解.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(a-b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\sin(x+b)\cos(x+a)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}+C.$$

3. 用第二类换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+2}}$;

思路　当被积函数中含有根式时，先去掉根号，这是第二类换元积分法的基本手段之一.

解　令 $\sqrt{x+2}=t$，则 $x=t^2-2$，故 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+2}}=\int\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\ln|1+t|)+C=2(\sqrt{x+2}-\ln(1+\sqrt{x+2}))+C.$$

(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{1-x}}$;

思路　若被积函数中有开不同次的根式时，为了去掉根号，令开最小公倍数次的根式为 t.

解　令 $\sqrt[4]{1-x}=t$，则 $x=1-t^4$，故 $\mathrm{d}x=-4t^3\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{1-x}}=\int\frac{-4t^3}{t^2+t}\mathrm{d}t=-4\int\frac{t^2}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=-4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=-4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C$$

$$=-4\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}-\sqrt[4]{1-x}+\ln\left|\sqrt[4]{1-x}+1\right|\right)+C.$$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2+1)}$;

思路　当有理函数的分母次数大于分子次数时，可尝试倒代换.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2+1)}=-\int\frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t^2+1}$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{x^2}+C.$$

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^4}}$;

解　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^4}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}.$

令 $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}=t$，则 $x=1-\frac{2}{1+t^3}$，故 $\mathrm{d}x=\frac{6t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}}=\int\frac{\dfrac{6t^2}{(1+t^3)^2}}{\left(1-\left(1-\dfrac{2}{1+t^3}\right)^2\right)t}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$=-\frac{3}{2t}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

(5) $\int\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$；

思路 对于无理函数的不定积分，当分母的次数较高时，也可尝试倒代换.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}}{\dfrac{1}{t^4}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int(t^2-1)^{\frac{1}{2}}|t|\,\mathrm{d}t.$$

当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(t^2-1)=-\frac{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C=-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$$

当 $x<0$ 时，结果相同. 故 $\int\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$

(6) $\int\dfrac{2^x\times3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$；

思路 被积函数可整理为 $\dfrac{2^x\times3^x}{9^x-4^x}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-1}$，可采用指数代换 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=t$，进行代换，这样的代换可以化简被积函数，从而求出不定积分.

解 令 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=t$，则

$$\int\frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\dfrac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-1}=\frac{1}{\ln\dfrac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{2\ln\dfrac{3}{2}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$$

(7) $\int x^2\sqrt{3-x^2}\mathrm{d}x$；

思路 被积函数中含有根式 $\sqrt{3-x^2}$，可用三角代换 $x=\sqrt{3}\sin t$ 或 $x=\sqrt{3}\cos t$ 消去根式.

解　设 $x=\sqrt{3}\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int x^2\sqrt{3-x^2}\mathrm{d}x=\int 3\sin^2 t\cdot\sqrt{3}\cos t\cdot\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t=9\int\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{9}{4}\int\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{9}{8}\int(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{9}{8}t-\frac{9}{32}\sin 4t+C=\frac{9}{8}t-\frac{9}{8}\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C$$

$$=\frac{9}{8}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3\sqrt{3}x}{8}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\left(1-\frac{2x^2}{3}\right)+C.$$

(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$；

思路　被积函数的分母中含有平方和 $1+x^2$，因此可以考虑三角代换 $x=\tan t$，将原积分转换为三角函数的积分.

解　设 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\mathrm{d}t=\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C.$$

(9) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x$；

思路　被积函数中含有二次根式 $\sqrt{x^2-a^2}$，可考虑作三角代换 $x=a\sec t$，将原积分转换为三角函数的积分.

解　令 $x=a\sec t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t=a\int\tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$=a\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=a(\tan t-t)+C=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$$

(10) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}}\mathrm{d}x$；

思路　被积函数中含有二次根式 $\sqrt{x^2+4x+8}=\sqrt{(x+2)^2+4}$，故可设 $x+2=2\tan t$ 将根号去掉.

解　令 $x+2=2\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=2\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}}\mathrm{d}x=\int\frac{(2\tan t-2)\cdot 2\sec^2 t}{2\sec t}\mathrm{d}t$$

$$=2\left(\int\sec t\tan t\mathrm{d}t-\int\sec t\mathrm{d}t\right)$$

$=2(\sec t-\ln|\sec t+\tan t|)+C_1$

$=\sqrt{x^2+4x+8}-2\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+8})+C.\ (C=C_1+2\ln2)$

(11) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}$;

思路 被积函数中含有二次根式 $\sqrt{(x^2-2x+4)^3}=\sqrt{(3+(x-1)^2)^3}$，故可设 $x-1=\sqrt{3}\tan t$ 将根号去掉.

解 令 $x-1=\sqrt{3}\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=\sqrt{3}\sec^2t\,dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{x-1}{3\sqrt{x^2-2x+4}}+C.$$

(12) $\int\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}dx.$

思路 将被积函数整理为 $\int\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right\}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$，然后用第一类换元积分法，令 $t=\frac{f(x)}{f'(x)}$ 求解.

解 $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]dx=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}dx$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C.$$

4.3　分部积分法

4.3.1　知识点概况

1. 分部积分公式为

$$\int uv'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u=uv-\int u'v\mathrm{d}x\,.$$

分部积分法适用于被积函数为两个不同函数类型乘积的不定积分，其公式特点是两边的积分中 u 与 v 恰好位置互换，当 $\int u\mathrm{d}v$ 不易直接计算，但 $\int v\mathrm{d}u$ 易于计算时，可以使用分部积分法. 对于选取 u，$\mathrm{d}v$ 的原则，积分容易者选为 $\mathrm{d}v$，求导简单者选为 u.

2. 如果被积函数类型为 $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$，其中 k，a 为常数，$P_n(x)$ 为 n 次多项式时，均可以令 $u(x)=P_n(x)$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x(\sin ax\mathrm{d}x$ 或 $\cos ax\mathrm{d}x)$.

3. 如果被积函数类型为 $\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\arccos x\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$，其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式时，均可以令 $u(x)=\ln x(\arcsin x$，或 $\arctan x)$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$.

4. 如果被积函数类型为 $\int \mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)\mathrm{d}x$，其中 k，a，b 均为常数，那么 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取可以随意.

4.3.2　习题解答

1. 求不定积分 $\int x\cos 2x\mathrm{d}x$.

思路　被积函数类型为 $\int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$，令 $u(x)=P_n(x)$，$\mathrm{d}v=\cos ax\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\sin ax}{a}\right)$.

解　$\int x\cos 2x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{x\sin 2x}{2}-\int\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

2. 求不定积分 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

思路　利用降幂公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，将被积函数化为 $x\sin^2 x=\frac{1}{2}(x-x\cos 2x)$ 求解.

解　$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x-x\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int x\mathrm{d}x-\int x\cos 2x\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sin 2x\right)$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x+\int \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

3. 求不定积分$\int (x-1)\cos 5x\mathrm{d}x$.

思路 将被积函数拆成$(x-1)\cos 5x=x\cos 5x-\cos 5x$，然后对$\int x\cos 5x\mathrm{d}x$用分部积分公式求解，对$\int \cos 5x\mathrm{d}x$用凑微分法求解.

解

方法一：

$$\int (x-1)\cos 5x\mathrm{d}x=\int x\cos 5x\mathrm{d}x-\int \cos 5x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\left(\frac{\sin 5x}{5}\right)-\frac{1}{5}\int \cos 5x\mathrm{d}(5x)$$

$$=\frac{x\sin 5x}{5}-\frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}x-\frac{1}{5}\sin 5x$$

$$=\frac{x\sin 5x}{5}-\frac{1}{25}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x)-\frac{1}{5}\sin 5x$$

$$=\frac{x\sin 5x}{5}+\frac{\cos 5x}{25}-\frac{\sin 5x}{5}+C.$$

方法二：

$$\int (x-1)\cos 5x\mathrm{d}x=\int (x-1)\mathrm{d}\left(\frac{\sin 5x}{5}\right)=\frac{(x-1)\sin 5x}{5}-\frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(x-1)\sin 5x}{5}+\frac{1}{25}\cos 5x+C.$$

4. 求不定积分$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

思路 被积函数类型为$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$，令$u(x)=P_n(x)$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}\right)$.

解 $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}+\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C.$

5. 求不定积分$\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x$.

思路 令$u(x)=\ln x$，$\mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^2-x)$.

解 $\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}(x^2-x)=(x^2-x)\ln x-\int (x^2-x)\mathrm{d}(\ln x)$

$$=(x^2-x)\ln x-\int \frac{x^2-x}{x}\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x-\int (x-1)\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C.$$

6. 求不定积分 $\int x^2\ln 3x\mathrm{d}x$.

思路　被积函数类型为 $\int P_n(x)\ln ax\mathrm{d}x$，令 $u(x)=\ln ax$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$.

解　$$\int x^2\ln 3x\mathrm{d}x=\int \ln 3x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3\ln 3x}{3}-\int\frac{x^3}{3}\mathrm{d}(\ln 3x)=\frac{x^3\ln 3x}{3}-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^3\ln 3x}{3}-\frac{x^3}{9}+C.$$

7. 求不定积分 $\int(2x+1)\ln x\mathrm{d}x$.

思路　被积函数类型为 $\int P_n(x)\ln ax\mathrm{d}x$，令 $u(x)=\ln ax$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$.

解　$$\int(2x+1)\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}(x^2+x)=(x^2+x)\ln x-\int(x^2+x)\mathrm{d}(\ln x)$$
$$=(x^2+x)\ln x-\int(x+1)\mathrm{d}x=(x^2+x)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C.$$

8. 求不定积分 $\int\frac{\ln 5x}{x^2}\mathrm{d}x$.

思路　令 $u(x)=\ln 5x$，$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

解　$$\int\frac{\ln 5x}{x^2}\mathrm{d}x=\int\ln 5x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln 5x}{x}+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\ln 5x)=-\frac{\ln 5x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\ln 5x}{x}-\frac{1}{x}+C.$$

9. 求不定积分 $\int x\arcsin x\mathrm{d}x$.

思路　被积函数类型为 $\int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$，令 $u(x)=\arcsin x$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$.

解　$$\int x\arcsin x\mathrm{d}x=\int\arcsin x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2\arcsin x}{2}-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\arcsin x)$$
$$=\frac{x^2\arcsin x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{x^2\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}\left(\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$=\frac{x^2\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}(2x^2\arcsin x-2\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C.$$

10. 求不定积分 $\int(x^2-1)\arctan x\mathrm{d}x$.

思路　被积函数类型为 $\int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$，令 $u(x)=\arctan x$，$\mathrm{d}v=P_n(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int (x^2-1)\arctan x\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\arctan x-\int\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3x)\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3-3x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3x)\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{4x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3x)\arctan x-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}-2\ln(1+x^2)\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}\left[(x^3-3x)\arctan x-\frac{x^2}{2}+2\ln(1+x^2)\right]+C.$$

11. 求不定积分 $\int \arctan\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x$.

思路 令 $u(x)=\arctan\sqrt{4x-1}$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$.

解 $\int \arctan\sqrt{4x-1}\mathrm{d}x = x\arctan\sqrt{4x-1}-\int x\mathrm{d}(\arctan\sqrt{4x-1})$

$$=x\arctan\sqrt{4x-1}-\int\frac{x}{1+4x-1}\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}\mathrm{d}x$$

$$=x\arctan\sqrt{4x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{4x-1}}\mathrm{d}(4x-1)$$

$$=x\arctan\sqrt{4x-1}-\frac{1}{4}\sqrt{4x-1}+C.$$

12. 求不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

思路 令 $u(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

13. 求不定积分 $\int e^{-2x}\cos x\mathrm{d}x$.

思路 被积函数类型为 $\int e^{kx}\cos(ax+b)\mathrm{d}x$，其中 k，a，b 均为常数，那么 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取可以随意.

解 $\int e^{-2x}\cos x\mathrm{d}x = \int e^{-2x}\mathrm{d}(\sin x) = e^{-2x}\sin x-\int \sin x\mathrm{d}(e^{-2x}) = e^{-2x}\sin x+2\int e^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$

$$=e^{-2x}\sin x+2\int e^{-2x}d(-\cos x)$$

$$=e^{-2x}\sin x+2\left[-e^{-2x}\cos x+\int\cos x d(e^{-2x})\right]$$

$$=e^{-2x}\sin x-2e^{-2x}\cos x-4\int e^{-2x}\cos x dx,$$

所以 $\int e^{-2x}\cos x dx=\frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x-2\cos x)+C.$

14. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+1}}dx.$

思路　因为被积函数中含有 $\sqrt{2x+1}$，先考虑使用第二换元积分法，因为出现了 $\int P_n(x)e^{kx}dx$ 型的被积函数，故再使用分部积分法求不定积分.

解　令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，故 $dx=tdt$，于是

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx=\int te^t dt=\int td(e^t)=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C=e^{\sqrt{2x+1}}(\sqrt{2x+1}-1)+C.$$

15. 求不定积分 $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx.$

思路　令 $u(x)=\ln\ln x$，$dv=\frac{dx}{x}$.

解　$\int\frac{\ln\ln x}{x}dx=\int\ln\ln x d(\ln x)=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\ln x d(\ln\ln x)=\ln x\cdot\ln\ln x-\int\frac{1}{x}dx$

$$=\ln x\cdot\ln\ln x-\ln x+C$$

16. 求不定积分 $\int(\arccos x)^2dx.$

思路　连续两次使用分部积分公式.

解　$\int(\arccos x)^2dx=x(\arccos x)^2-\int xd(\arccos x)^2=x(\arccos x)^2+2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arccos x)^2-\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$

$$=x(\arccos x)^2-2\sqrt{1-x^2}+C.$$

17. 求不定积分 $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx.$

解　$\int\frac{x}{\cos^2x}dx=\int x\sec^2xdx=\int xd(\tan x)=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$$=x\tan x+\ln|\cos x|+C.$$

18. 求不定积分 $\int x^3\ln^2xdx.$

思路　连续两次使用分部积分公式.

解 $\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x=\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{4}\int x^4\mathrm{d}(\ln^2 x)$

$$=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^3\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{2}\left[\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4}\mathrm{d}(\ln x)\right]=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln^2 x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}\right)+C=\frac{x^4}{32}(8\ln^2 x-4\ln x+1)+C.$$

19. 求不定积分$\int\frac{\ln x-\ln(x+1)}{x(x+1)}\mathrm{d}x$.

思路 因为$[\ln x-\ln(x+1)]'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$，故可以利用分部积分法求解.

解 $\int\frac{\ln x-\ln(x+1)}{x(x+1)}\mathrm{d}x=\int[\ln x-\ln(x+1)]\mathrm{d}[\ln x-\ln(x+1)]$

$$=\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+1)]^2+C.$$

20. 求不定积分$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

思路 先利用分部积分法求$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$，然后对原积分再使用分部积分公式求解.

解 $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)}{2}-\frac{1}{2}\int(1+x^2)\mathrm{d}[\ln(1+x^2)]（令 1+x^2=t）$$

$$=\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)}{2}-\frac{x^2}{2}+C.$$

$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\left[\frac{(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2}{2}\right]$

$$=\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]-\frac{1}{2}\int[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]-\frac{1}{2}\int\left[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]-\frac{1}{2}\left(\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\left[x\ln(1+x^2)-\int x\mathrm{d}(\ln(1+x^2))\right]-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]-\frac{1}{2}\left[x\ln(1+x^2)-3\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$-\frac{\arctan x}{2}\cdot[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x}{2}+C.$

21. 求不定积分 $\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2\mathrm{d}x$.

思路 因为被积函数中含有$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2$，求一次导数降一次幂，故对此类问题需要连续两次使用分部积分公式求解.

解 $\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2\mathrm{d}x=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-\int x\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2$

$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int\mathrm{d}x$

$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.$

22. 求不定积分 $\int x(1+x)^{100}\mathrm{d}x$.

思路 令 $u(x)=x$，$\mathrm{d}v=(1+x)^{100}\mathrm{d}x$.

解 $\int x(1+x)^{100}\mathrm{d}x=\frac{1}{101}\int x\mathrm{d}(1+x)^{101}=\frac{1}{101}x(1+x)^{101}-\frac{1}{101}\int(1+x)^{101}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{101}x(1+x)^{101}-\frac{1}{101}\int(1+x)^{101}\mathrm{d}(1+x)=\frac{x(1+x)^{101}}{101}-\frac{(1+x)^{102}}{101\times102}+C.$

23. 求不定积分 $\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

思路 先用第二换元积分法，令$\sqrt{x}=t$，再用换元积分法求解.

解 令$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int t^2\sin t\mathrm{d}t=-2\int t^2\mathrm{d}(\cos t)=-2[t^2\cos t-\int\cos t\mathrm{d}(t^2)]$

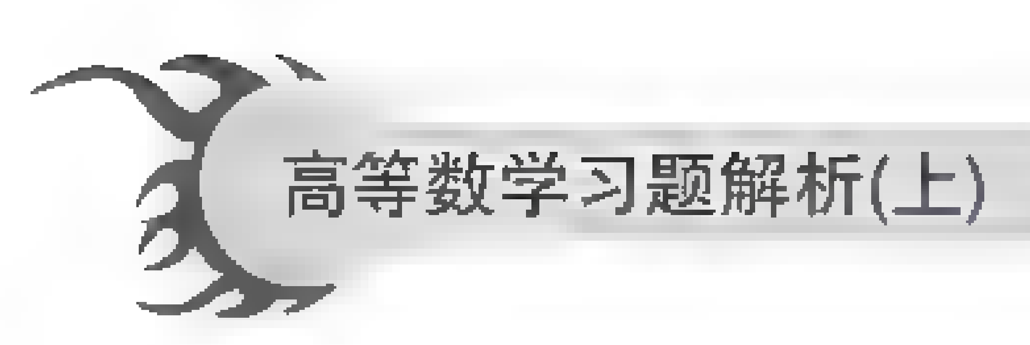
$=-2(t^2\cos t-2\int t\cos t\mathrm{d}t)=-2[t^2\cos t-2\int t\mathrm{d}(\sin t)]$

$=-2(t^2\cos t-2t\sin t+2\int\sin t\mathrm{d}t)=-2(t^2\cos t-2t\sin t-2\cos t)+C$

$=-2(x\cos\sqrt{x}-2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-2\cos\sqrt{x})+C.$

24. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

思路 先用第二换元积分法，令 $\frac{1}{x}=t$，再用换元积分法求解.



解 令$\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{dt}{t^2}$，于是

$$\int\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int te^t dt=-\int td(e^t)=-te^t+\int e^t dt=-te^t+e^t+C=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+C.$$

25. 求不定积分$\int \sin\ln x dx$.

思路 令 $u(x)=\sin\ln x$，$dv=dx$.

解
$$\int\sin\ln x dx=x\sin\ln x-\int xd(\sin\ln x)=x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx$$
$$=x\sin\ln x-\left[x\cos\ln x-\int xd(\cos\ln x)\right]$$
$$=x\sin\ln x-(x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx),$$

故$\int\sin\ln x dx=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$

26. 求不定积分$\int x\tan x\sec^4 x dx$.

思路 令 $u(x)=x$，$dv=\tan x\sec^4 x dx=d\left(\frac{\sec^4 x}{4}\right)$.

解
$$\int x\tan x\sec^4 x dx=\int xd\left(\frac{\sec^4 x}{4}\right)=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}\int\sec^4 x dx$$
$$=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^4 x}dx=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}(\int\tan^2 x\sec^2 x dx+\int\sec^2 x dx)$$
$$=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}\left[\int\tan^2 x d(\tan x)+\tan x\right]=\frac{x\sec^4 x}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x\right)+C.$$

4.4 函数的积分

4.4.1 知识点概况

1. 有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数，即具有如下形式的函数：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

其中，m 和 n 都是非负整数；$P(x)$是 n 次多项式；$Q(x)$是 m 次多项式；a_0，a_1，a_2，…，a_n 及 b_0，b_1，b_2，…，b_n 都是实数，并且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$.

当 $n<m$ 时，称这有理函数是真分式；当 $n\geq m$ 时，称这有理函数是假分式. 假分式总可以化成一个多项式与一个真分式之和的形式，通常采用多项式长除法，这种方法与数字除法一样.

2. 求真分式的不定积分时，对于真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可分解为最简形式，即 $Q(x)=Q_1(x)\cdots Q_n(x)$，且 $Q_1(x)$，…，$Q_n(x)$没有公因子，那么可拆成多个真分式之和，即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\cdots+\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}.$$

这个过程称作化真分式为部分分式之和，其中最简形式为$\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$，$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$的真分式形式，这里 x^2+px+q 为二次质因式，即 $p^2-4q<0$.

3. 将有理函数化为部分分式后可能出现的情况归纳如下：

(1) 当存在$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x$ 时，直接进行不定积分运算，即

$$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C;$$

(2) 当存在$\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$ 时，采用第一类换元积分法计算不定积分，即

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x=-\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C(n\neq1);$$

(3) 当存在$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$时，分母进行配方，并进行换元，化成之前学过的形式，即

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+qx)^n}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}\xlongequal[\text{令}\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{\text{令}x+\frac{p}{2}=u}\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n};$$

(4) 当存在$\int\frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$ 时，将分子凑成 x^2+px+q 的导数与常数之和形式，即

$$x+a=\frac{1}{2}(2x+p)+\left(a-\frac{p}{2}\right).$$

第一部分利用凑微分直接计算，第二部分的形式按照情况(3)进行处理与计算，即

$$\int\frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(a-\frac{p}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n},$$

其中，$p^2-4q<0$.

4. 三角函数有理式是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数．其特点是分子、分母都包含三角函数的和、差和乘积运算．由于各种三角函数都可以用 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理式表示，故三角函数有理式也就是 $\sin x$，$\cos x$ 的有理式.

用于三角函数有理式积分的变换：把 $\sin x$，$\cos x$ 表示成 $\tan\frac{x}{2}$ 的函数，然后做变换 $u=\tan\frac{x}{2}$.

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

变换后原积分变成了有理函数的积分.

5. 无理函数的积分一般要采用第二类换元积分法把根号消去．也称为根式代换法.

4.4.2 习题解答

1. 求不定积分 $\int\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$.

思路 将被积函数写成多项式与有理真分式之和，即 $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

解 $\int\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C.$

2. 求不定积分 $\int\frac{x^3}{x+2}\mathrm{d}x$.

思路 利用多项式长除法可得 $x^3=(x+2)(x^2-2x+4)-8$，于是被积函数可写为 $\frac{x^3}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)-8}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}$.

解 $\int\frac{x^3}{x+2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|+C.$

3. 求不定积分 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx$.

思路　因为 $(x^2-3x+5)'=2x-3$，故可用第一类换元积分法求解.

解　$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5}dx=\int \frac{d(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5}=\ln|x^2-3x+5|+C.$

4. 求不定积分 $\int \frac{x-2}{x^2-6x+10}dx$.

思路　将被积函数的分母配方并整理为 $\frac{x-2}{x^2-6x+10}=\frac{x-3+1}{(x-3)^2+1}=\frac{x-3}{(x-3)^2+1}+\frac{1}{(x-3)^2+1}$，然后用第一换元积分法求解.

解　
$$\int \frac{x-2}{x^2-6x+10}dx=\int \left[\frac{x-3}{(x-3)^2+1}+\frac{1}{(x-3)^2+1}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{d((x-3)^2+1)}{(x-3)^2+1}+\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+\arctan(x-3)+C.$$

5. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$.

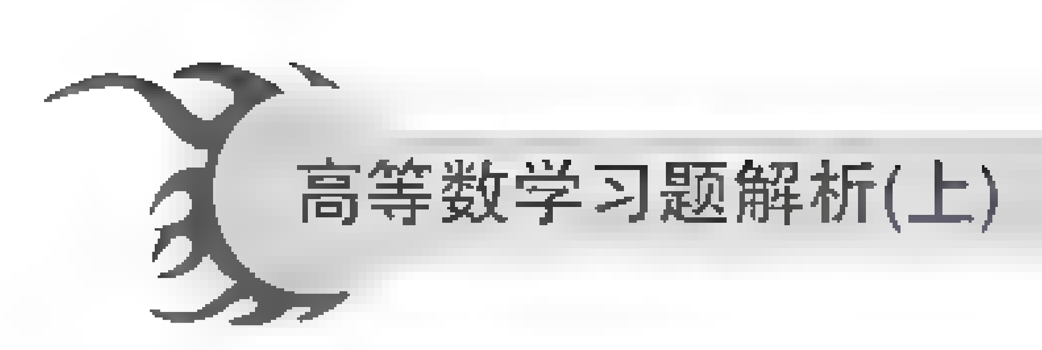
思路　设 $\frac{1}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{(A+B)x^2+Cx+3A}{x(x^2+3)}$，即 $A+B=0$，$C=0$，$3A=1$，解得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=0$.

解　
$$\int \frac{dx}{x(x^2+3)}=\int \left[\frac{1}{3x}-\frac{x}{3(x^2+3)}\right]dx$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}-\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3}$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^2+3)+C.$$

6. 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

思路　因为 $1+x^3=(1+x)(x^2-x+1)$，设
$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(B-A+C)x+(A+C)}{1+x^3},$$
即 $A+B=0$，$B-A+C=0$，$A+C=1$，解得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$.

解　
$$\int \frac{dx}{1+x^3}=\int \left[\frac{1}{3(1+x)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\right]dx=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x}+\frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$



$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

7. 求不定积分$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}\mathrm{d}x$.

思路 设$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-A+2B+C)x+(-2A+B-2C)}{(x+1)^2(x-2)},$$

即$A+B=1$，$-A+2B+C=0$，$-2A+B-2C=2$，解得$A=\frac{1}{3}$，$B=\frac{2}{3}$，$C=-1$.

解 $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x+1}+C.$$

8. 求不定积分$\int\frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

思路 利用多项式长除法可得$x^5+x^4+x^3+1=(x^2+1)(x^3+x^2-1)+2$，于是被积函数可写为$\frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^3+x^2-1)+2}{x^2+1}=x^3+x^2-1+\frac{2}{x^2+1}$.

解 $\int\frac{x^5+x^4+x^3+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(x^3+x^2-1+\frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x+2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x+2\arctan x+C.$$

9. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x^2-3x)}$.

思路 设$\frac{1}{x(x-3)(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(-3A-3C+D)x^2+(2A+2B-3D)x-6A}{x(x-3)(x^2+2)},$$

即$A+B+C=0$，$-3A-3C+D=0$，$2A+2B-3D=0$，$-6A=1$，于是$A=-\frac{1}{6}$，

$B=\frac{1}{33}$，$C=\frac{3}{22}$，$D=-\frac{1}{11}$.

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x^2-3x)}=-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{1}{33}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}+\frac{3}{22}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+2}-\frac{1}{11}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$

$$=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{33}\ln|x-3|+\frac{3}{44}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2)}{x^2+2}-\frac{\sqrt{2}}{22}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{1}{33}\ln|x-3|+\frac{3}{44}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{22}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

10. 求不定积分$\displaystyle\int\frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

思路 设$\displaystyle\frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}$，解得 $A=0$，$B=-3$，$C=0$，$D=3$，$E=3$，$F=2$，于是被积函数可写为

$$\frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}=\frac{-3}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+x+1}+\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}.$$

解 $\displaystyle\int\frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{-3}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\frac{3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=-3\arctan x+2\sqrt{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-3\arctan x+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-3\arctan x+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{3}{2(x^2+x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

令 $u=x+\frac{1}{2}$，则 $x=u-\frac{1}{2}$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(u^2+\frac{3}{4}\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\left[\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}+\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\cdot\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

综上，

$$\int\frac{-x^2+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-3\arctan x+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{3}{2(x^2+x+1)}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=-3\arctan x+\frac{17\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{x-4}{3(x^2+x+1)}+C.$$

11. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$.

思路 被积函数可化为$\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+1}=\frac{\csc^2 x}{\cot^2 x+2}$，然后利用第一类换元积分法求解.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\csc^2 x}{\cot^2 x+2}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\cot^2 x+2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

12. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

思路 利用万能公式 $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，将三角有理式的积分化为有理函数的的积分.

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2u+1}=2\int\frac{\mathrm{d}(u+1)}{(u+1)^2}=-\frac{1}{u+1}+C$$

$$=-\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}+C.$$

13. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-2\cos x}$.

思路 利用万能公式 $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，将三角有理式的积分化为有理函数的的积分.

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-2\cos x}=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u}=\ln|1+u|+C$$

$$-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

14. 求不定积分 $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

思路 利用根式代换法将无理函数的积分化为有理函数的积分.

解 令 $u=\sqrt[3]{x+3}$，则 $x=u^3-3$，$dx=3u^2du$，于是

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}=\int\frac{3u^2du}{1+u}=3\int\frac{u^2-1+1}{1+u}du=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=3\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|1+u|\right)+C=3\left[\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}}{2}-\sqrt[3]{x+3}+\ln\left|1+\sqrt[3]{x+3}\right|\right]+C.$$

15. 求不定积分 $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

思路 利用根式代换法将无理函数的积分化为有理函数的积分.

解 令 $u=\sqrt{x+1}$，则 $x=u^2-1$，$dx=2udu$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx=\int\frac{u+1}{u-1}\cdot 2udu=2\int\left(u+2+\frac{2}{u-1}\right)du=u^2+4u+4\ln|u-1|+C$$

$$=x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C.$$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$.

思路 将被积函数整理为 $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}$，然后令 $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，利用根式代换法将无理函数的积分化为有理函数的积分.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}=\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}$.

令 $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，则 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$，$dx=-\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}du$. 于是

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}=\int\frac{1}{\left[\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1\right]\cdot u}\cdot\left[-\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}\right]du$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{u^2}du=\frac{3}{2u}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$



4.5 总习题解答

1. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x})}{1+\mathrm{e}^{-x}}=-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.$

2. 求不定积分$\int\frac{x}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x}{(x+2)^3}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x+2}\int\frac{u-2}{u^3}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+C=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+C.$

3. 求不定积分$\int\frac{x^3}{1-x^8}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x^3}{1-x^8}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^4)}{1-(x^4)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x^4}\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{8}\left(\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u}+\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right)$

$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x^4}{1-x^4}\right|+C.$

4. 求不定积分$\int\frac{1+\sin x}{x-\cos x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1+\sin x}{x-\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-\cos x)}{x-\cos x}=\ln|x-\cos x|+C.$

5. 求不定积分$\int\frac{\ln^2(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\ln^2(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int\ln^2(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)\xlongequal{u=\ln x}\int\ln^2u\mathrm{d}u=u\ln^2u-\int u\mathrm{d}(\ln^2u)$

$=u\ln^2u-2\int\ln u\mathrm{d}u=u\ln^2u-2\left[u\ln u-\int u\mathrm{d}(\ln u)\right]=u\ln^2u-2\left(u\ln u-\int\mathrm{d}u\right)$

$=u\ln^2u-2u\ln u+2u+C=\ln x\ln^2(\ln x)-2\ln x\ln\ln x+2\ln x+C.$

6. 求不定积分$\int\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^4x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos^2x)}{1+\cos^4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan(\cos^2x)+C.$

7. 求不定积分$\int\cot^4x\mathrm{d}x$.

解 $\int\cot^4x\mathrm{d}x=\int\cot^2x(\csc^2x-1)\mathrm{d}x=-\int\cot^2x\mathrm{d}(\cot x)-\int(\csc^2x-1)\mathrm{d}x$

$=-\frac{\cot^3x}{3}+\cot x+x+C.$

8. 求不定积分$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$.

解 $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\sin\left(-\frac{x}{6}\right)+\sin\frac{5x}{6}\right]\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\left[\sin\left(-\frac{7x}{6}\right)+\sin\frac{11x}{6}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{x}{6}-\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{6}-\frac{1}{7}\cos\frac{7x}{6}+\frac{1}{11}\cos\frac{11x}{6}\right)+C.$$

9. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6-1)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6-1)}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}-\int\frac{u^5}{1-u^6}\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(1-u^6)}{1-u^6}=\frac{1}{6}\ln|1-u^6|+C$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|1-\frac{1}{x^6}\right|+C=\frac{1}{6}\ln|x^6-1|-\ln|x|+C.$$

10. 求不定积分$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\arctan x+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\arctan x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

11. 求不定积分$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(2x-\sin 2x)$

$$=\frac{1}{4}\left[x(2x-\sin 2x)-\int(2x-\sin 2x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[x(2x-\sin 2x)-\left(x^2+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]+C$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C.$$

12. 求不定积分$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

解 当$a\neq 0$时，

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\sin bx\,\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}(\sin bx)$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}\int\cos bx\,\mathrm{d}(e^{ax})\right]$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a^2}\left[e^{ax}\cos bx-\int e^{ax}\mathrm{d}(\cos bx)\right]$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{be^{ax}\cos bx}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x+C_1,$$

故 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}+C$；

当 $a=0$，$b\neq0$ 时，

$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\int\sin bx\mathrm{d}x=-\frac{1}{b}\cos bx+C$；

当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，

$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=C.$

13. 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

解 令 $u=\sqrt{1+e^{2x}}$，则 $x=\frac{\ln(u^2-1)}{2}$，$\mathrm{d}x=\frac{u}{u^2-1}\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}u}{u-1}-\int\frac{\mathrm{d}u}{u+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+C.$$

14. 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $u=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{u}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^3}\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}}\mathrm{d}u=-\int\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=-\int\frac{1+u^2-1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u$$

$$=-\int\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u+\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]+\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C$$

$$=-\frac{1}{2}[u\sqrt{1+u^2}+\ln(u+\sqrt{1+u^2})]+C.$$

15. 求不定积分 $\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\sqrt{x}$，则 $x=u^2$，则 $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$，于是

$$\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int u^2\cos u\mathrm{d}u=2\int u^2\mathrm{d}\sin u=2\left[u^2\sin u-\int\sin u\mathrm{d}(u^2)\right]$$

$$=2\left(u^2\sin u-2\int u\sin u\mathrm{d}u\right)=2u^2\sin u+4\int u\mathrm{d}\cos u=2u^2\sin u+4\left(u\cos u-\int\cos u\mathrm{d}u\right)$$

$$=2u^2\sin u+4u\cos u-4\sin u+C=2x\sin\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-4\sin\sqrt{x}+C.$$

16. 求不定积分 $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

解 $\int x\ln(1+x^2)dx$

$=\int \ln(1+x^2)d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\frac{1}{2}\int x^2 d[\ln(1+x^2)]$

$=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\int\frac{x(x^2+1)-x}{1+x^2}dx$

$=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$=\frac{x^2\ln(1+x^2)}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

17. 求不定积分$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$.

解 $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\int\cot^2 x\csc x dx=\int(\csc^2 x-1)\csc x dx=\int\csc^3 x dx-\int\csc x dx$

$$=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

18. 求不定积分$\int\arctan 2\sqrt{x}dx$.

解 $\int\arctan 2\sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\int\arctan 2\sqrt{x}d(1+4x)$

$$=\frac{1}{4}(1+4x)\arctan 2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\int(1+4x)d(\arctan 2\sqrt{x})$$

$$=\frac{1}{4}(1+4x)\arctan 2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}(1+4x)\arctan 2\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

19. 求不定积分$\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$.

解 令$u=x^4$，则$x=\sqrt[4]{u}$，$dx=\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}du$，于是

$\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\int\frac{u^{\frac{11}{4}}}{u^2+3u+2}\cdot\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}du=\frac{1}{4}\int\frac{u^2}{u^2+3u+2}du$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)du=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\ln|1+u|-\ln|2+u|+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4}+C.$$

20. 求不定积分$\int\frac{dx}{1-x^4}$.

解 $\int\frac{dx}{1-x^4}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{1}{4}\ln|1-x|-\frac{1}{4}\ln|1+x|+\frac{1}{2}\arctan x+C=-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

21. 求不定积分$\int e^{\cos x}\cdot\frac{x\sin^3x+\cos x}{\sin^2x}dx$.

解 $\int e^{\cos x}\cdot\frac{x\sin^3x+\cos x}{\sin^2x}dx=\int xe^{\cos x}\sin x dx+\int e^{\cos x}\cot x\cdot\csc x dx$

$$=-\int xd(e^{\cos x})-\int e^{\cos x}d(\csc x)=-xe^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx-e^{\cos x}\csc x+\int\csc x d(e^{\cos x})$$

$$=-xe^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx-e^{\cos x}\csc x-\int\csc x\cdot e^{\cos x}\sin x dx$$

$$=-xe^{\cos x}+\int e^{\cos x}dx-e^{\cos x}\csc x-\int e^{\cos x}dx=-xe^{\cos x}-e^{\cos x}\csc x+C.$$

22. 求不定积分$\int\frac{dx}{1+e^x}$.

解 令$u=e^x$，则$x=\ln u$，$dx=\frac{1}{u}du$，于是

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{\frac{1}{u}}{1+u}du=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|+C=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+C$$

$$=x-\ln(1+e^x)+C.$$

23. 求不定积分$\int\sqrt{1-x^2}\arccos x dx$.

解 令$u=\arccos x(0<u<\pi)$，则$x=\cos u$，$dx=-\sin u du$，于是

$$\int\sqrt{1-x^2}\arccos x dx=-\int u\sin^2u du=-\int u\cdot\frac{1-\cos2u}{2}du=-\frac{1}{4}\int ud(2u-\sin2u)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[u(2u-\sin2u)-\int(2u-\sin2u)du\right]$$

$$=-\frac{u(2u-\sin2u)}{4}+\frac{1}{4}\int(2u-\sin2u)du$$

$$=-\frac{u(2u-\sin2u)}{4}+\frac{1}{4}\left(u^2+\frac{\cos2u}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{u^2}{4}+\frac{u\sin2u}{4}+\frac{\cos2u}{8}+C.$$

24. 求不定积分$\int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx$.

解 $\int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2x\cos^3x}dx=\int\tan x\cdot\sec^2x\cdot\csc^2x dx$

$$=\int\tan x\cdot\csc^2x d(\tan x)$$

$$=\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)d(\tan x)=\frac{\tan^2x}{2}+\ln|\tan x|+C.$$

25. 求不定积分 $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin^2 x)} \xlongequal{u=\sin x} \int \frac{du}{(1+u)(1-u^2)}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)^2}$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{2(1+u)} + C$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{2(1+\sin x)} + C.$

第5章　定　积　分

5.1　定积分的概念与性质

5.1.1　知识点概况

1. 设函数 $f(x)$在$[a,\ b]$上有界，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把$[a,\ b]$分成 n 个小区间 $[x_0,\ x_1]$，$[x_1,\ x_2]$，$[x_2,\ x_3]$，$\cdots$，$[x_{n-1},\ x_n]$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. $\forall \xi_i\in[x_{i-1},\ x_i](i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限存在，且极限值与区间$[a,\ b]$的分法和ξ_i 的取法无关，则称这个极限为函数 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，x 为积分变量；$f(x)$为被积函数；$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式；$[a,\ b]$为积分区间；a 为积分上限；b 为积分下限.

2. 定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

3. 和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$的积分和.

4. 如果函数 $f(x)$在$[a,\ b]$上的定积分存在，我们就说 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上可积.

5. 设 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,\ b]$上可积.

6. 设 $f(x)$在区间$[a,\ b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在$[a,\ b]$上可积.

7.（定积分的几何意义）在区间$[a,\ b]$上，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$以及两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；当 $f(x)\leqslant 0$ 时，

由曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方，定积分在几何上表示上述曲边梯形面积的负值：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$既取得正值又取得负值时，函数 $f(x)$的图形某些部分在 x 轴的上方，而其他部分在 x 轴的下方. 如果我们对面积赋以正负号，即对在 x 轴上方的图形面积赋以正号，对在 x 轴下方的图形面积赋以负号，则在一般情形下，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$的图形及两条直线 $x=a$，$x=b$ 之间的各部分面积的代数和，如图 5.1.1 所示，

$$\int_a^b f(x)=A+B-C$$

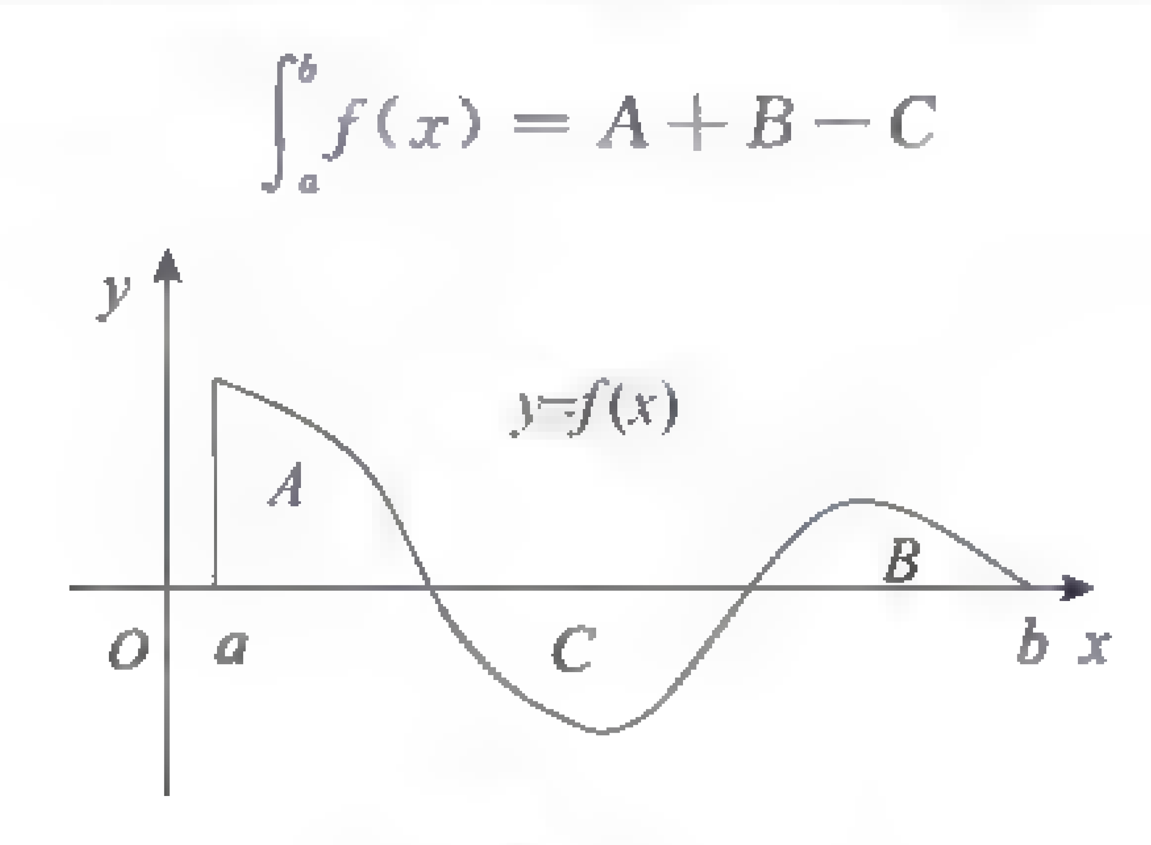


图 5.1.1

通过定积分的几何意义可以看出，当被积函数给定，积分区间一旦固定时，定积分的结果就是常数，即曲线所围图形面积的代数和.

由定积分的定义及几何性质可知：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0,\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.$$

8. 规定：

(1) 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

9. 定积分的性质

(1) 函数的和(差)的定积分等于它们的定积分的和(差)，即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两部分区间上定积分之和，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 如果在区间$[a, b]$上$f(x)=1$，则$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

(5) 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0(a<b)$.

推论① 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x(a<b)$.

推论② $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x(a<b)$.

(6) 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)(a<b).$$

(7)（定积分中值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

这个公式叫做积分中值公式.

5.1.2 习题解答

1. 利用定积分的定义计算由抛物线$y=x^2+1$，两直线$x=1$，$x=-1$及x轴所围成的图形的面积.

解 因为函数$y=x^2+1$在闭区间$[-1, 1]$上连续，故可积. 为了计算简单起见，将$[-1, 1]$分成n等份，分点为$x_i=-1+\frac{2}{n}\cdot i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$，每个区间长度为$\Delta x_i=\frac{2}{n}$，取$\xi_i$为小区间的右端点$x_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(-1+\frac{2}{n}\cdot i\right)^2+1\right]\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}2-\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=4-\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=4-\frac{4(n+1)}{n}+\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2},$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{8}{3}$，故所求图形面积为$\frac{8}{3}$.

2. 利用定积分的几何意义计算下列定积分：

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)\mathrm{d}x$；

解 根据定积分的几何意义，定积分$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)\mathrm{d}x$表示由直线$y=2x+1$，$x=1$及$x$轴围成的图形的面积，该图形是三角形，底边长为$\frac{3}{2}$，高为3，因此面积为$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3=$

$\frac{9}{4}$，即 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$.

(2) $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$；

解 根据定积分的几何意义，定积分 $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=\sqrt{9-x^2}$ 及 x 轴、y 轴围成的半径为 3 的圆的四分之一的图形，因此其面积为 $\frac{9\pi}{4}$，即 $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{4}$.

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$；

解 曲线 $y=\sin x$ 的图像在 $[-\pi,\pi]$ 上关于原点对称，定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$ 的几何意义为曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴围成的图形面积减去曲线 $y=\sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴围成的图形面积，因为两部分的面积相等，所以差为零，即 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$.

(4) 已知 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$，求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

解 曲线 $y=\cos x$ 的图像在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上关于 y 轴对称，定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$ 的几何意义为曲线 $y=\cos x$ 与 x 轴及 y 轴围成的图形面积的 2 倍，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2$.

3. 已知 $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=5$，$\int_{2}^{5}f(x)\mathrm{d}x=4$，$\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=3$，求：

(1) $\int_{-1}^{2}6f(x)\mathrm{d}x$；

解 由定积分的性质，$\int_{-1}^{2}6f(x)\mathrm{d}x=6\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=30$.

(2) $\int_{-1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$；

解 由定积分的性质，$\int_{-1}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}f(x)\mathrm{d}x=5+4=9$.

(3) $\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}[4f(x)-5g(x)]\mathrm{d}x$；

解 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}[4f(x)-5g(x)]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-\frac{5}{3}\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\times5-\frac{5}{3}\times3=\frac{5}{3}$.

(4) $\int_{5}^{2}f(x)\mathrm{d}x$；

解 $\int_{5}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{2}^{5}f(x)\mathrm{d}x=-4$.

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$在$[a,b]$上不恒为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$；

证明　因为 $f(x)$在$[a,b]$上不恒为零，故存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$. 因为 $f(x)$在点 x_0 连续，故存在$[a_1,b_1]\subset[a,b]$，使当 $x\in[a_1,b_1]$时，$f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 于是由定积分的性质可得，

$$\int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\ \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{a_1}^{b_1}\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x=\frac{(b_1-a_1)f(x_0)}{2}>0,\ \int_{b_1}^{b} f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{b_1}^{b} f(x)\mathrm{d}x>0.$$

(2) 若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$；

证明　反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零，则由 (1) 得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

(3) 若在$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv g(x)$；

证明　设 $h(x)=g(x)-f(x)$，则 $h(x)\geqslant 0$，且

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

由(2)得，在$[a,b]$上 $h(x)\equiv 0$，即$[a,b]$上 $f(x)\equiv g(x)$.

(4) $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$（其中 $b-a=1$）.

证明　记 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，由定积分的性质(5)，得 $\int_a^b[f(x)-A]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$，即

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)-A]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+A^2(b-a)\\&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

故 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

5. 比较下列定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$；

解　在区间$[0,1]$上 $x^2\geqslant x^4$，且二者不恒等，因此 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x>\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$；

解 在区间[0, 1]上$\sqrt{x}\leqslant\sqrt[3]{x}$，且二者不恒等，因此$\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x<\int_0^1\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_2^4 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与$\int_2^4\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；

解 在区间[2, 4]上 $\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^{2x}$，故 $\int_2^4\mathrm{e}^x\mathrm{d}x<\int_2^4\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

(4) $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$ 与$\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$；

解 在区间[1, 2]上 $\ln x\geqslant(\ln x)^2$，且二者不恒等，因此 $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x>\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

(5) $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x$；

解 因为当 $x>0$ 时 $x>\ln(1+x)$，故 $\mathrm{e}^x>1+x$，因此 $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x$.

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$.

解 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上 $\sin x\leqslant x$，且二者不恒等，因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$.

6. 估计下列各积分的值：

(1) $\int_1^3(1+x^3)\mathrm{d}x$；

解 设 $f(x)=1+x^3$，其在[1, 3]上连续且单调递增，故其最小值为 $f_{\min}(1)=2$，最大值为 $f_{\max}(3)=28$，由定积分的性质(6)得

$$4=2\times(3-1)\leqslant\int_1^3(1+x^3)\,\mathrm{d}x\leqslant 28\times(3-1)=56.$$

(2) $\int_2^5\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$；

解 设 $f(x)=\frac{1}{x+2}$，其在[2, 5]上单调递减，故其最小值为 $f_{\min}(5)=\frac{1}{7}$，最大值为 $f_{\max}(2)=\frac{1}{4}$，由定积分的性质(6)得

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\times(5-2)\leqslant\int_2^5\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\times(5-2)=\frac{3}{4}.$$

(3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\cos^2x)\mathrm{d}x$；

解 在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$上，$1=1+0\leqslant1+\cos^2x\leqslant1+1=2$，由定积分的性质(6)得

$$\pi=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\cos^2x)\mathrm{d}x\leqslant 2\times\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi.$$

(4) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x$；

解 $f(x)=\arctan x$ 在 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$ 上单调递增，故其最小值为 $f_{\min}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$，最大值为 $f_{\max}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$，于是 $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}=\frac{\pi}{6}\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\leqslant\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{3}\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

(5) $\int_0^2 e^{x^2}\mathrm{d}x$；

解 在区间 $[0,2]$ 上，$0\leqslant x^2\leqslant 4$，故 $1\leqslant e^{x^2}\leqslant e^4$，于是 $2\leqslant\int_0^2 e^{x^2}\mathrm{d}x\leqslant 2e^4$.

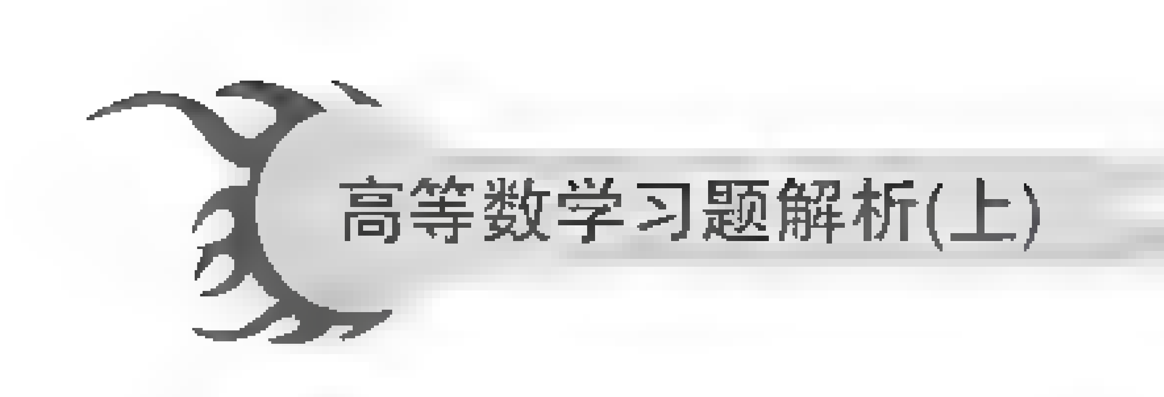
(6) $\int_{-1}^3\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 设 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，其在 $[-1,3]$ 上连续，故其存在最大值与最小值.

$f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$，由 $f'(x)=0$ 得在 $(-1,3)$ 内 $f(x)$ 的驻点为 $x=1$.

计算得 $f(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{3}{10}$，即 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，

由定积分的性质(6)得 $-2=-\frac{1}{2}\times 4\leqslant\int_{-1}^3\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\times 4=2$.



5.2 微积分基本公式

5.2.1 知识点概况

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，并且设 x 为 $[a, b]$ 上的一点，我们把函数 $f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 称为积分上限函数. 它是区间 $[a, b]$ 上的函数，记为

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } \Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a, b]$ 上具有导数，并且它的导数为

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\,(a\leqslant x<b).$$

3. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

4. 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

此公式称为牛顿—莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式.

5.2.2 习题解答

1. 计算下列各导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(2t-1)\mathrm{d}t$；

思路 积分上限函数的导数等于被积函数.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(2t-1)\mathrm{d}t=\cos(2x-1)$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$；

思路 $[\Phi(\varphi(x))]'=\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{(2x)^2}\cdot 2=2\mathrm{e}^{4x^2}$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{\mathrm{e}^{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$；

思路　$\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x}^{e^{-x}}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}(e^{-x})'-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{x^2}^{\arctan x}\sin 2t^2\,\mathrm{d}t$;

思路　$\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{x^2}^{\arctan x}\sin 2t^2\,\mathrm{d}t=\sin[2(\arctan x)^2]\cdot(\arctan x)'-\sin[2(x^2)^2]\cdot(x^2)'$

$$=\frac{\sin[2(\arctan x)^2]}{1+x^2}-2x\sin(2x^4).$$

2. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$ 确定，求 $y'(0)$.

解　将方程左右两边同时对自变量 x 求导数：

$$\left(\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'+\left(\int_0^x \cos t\mathrm{d}t\right)'=0,$$

从而 $e^{y^2}\cdot y'+\cos x=0$.

当 $x=0$ 时，由原方程得 $\int_0^y e^{t^2}\mathrm{d}t=0$，因为 $e^{t^2}>0$，故 $y=0$.

于是 $e^0\cdot y'(0)+\cos 0=0$，解得 $y'(0)=-1$.

3. 计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t}$;

思路　利用洛必达法则求解.

解　$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\left[\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2\right]'}{\left(\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'}{xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\cdot e^{x^2}}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)'}{1}=\lim_{x\to0}2e^{x^2}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^3\tan(\sqrt{1+x}-1)}$.

思路　利用洛必达法则与等价无穷小求解.

解　$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^3\tan(\sqrt{1+x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^3\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[\int_0^x \sin t^2\cdot\ln(1+t)\mathrm{d}t\right]'}{\left(\frac{x^4}{2}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot\ln(1+x)}{2x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{2x^3}-\frac{1}{2}.$$

4. 计算下列积分:

(1) $\int_1^2 (x^2+3x+4)\mathrm{d}x$;

解 $$\int_1^2 (x^2+3x+4)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{2^3}{3}+\frac{3\times 2^2}{2}+4\times 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{3\times 1^2}{2}+4\times 1\right)$$
$$=\frac{50}{3}-\frac{35}{6}=\frac{65}{6}.$$

(2) $\int_1^3\left(x^4-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$;

解 $$\int_1^3\left(x^4-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5}-2\ln|x|\right]_1^3=\left(\frac{3^5}{5}-2\ln 3\right)-\left(\frac{1^5}{5}-2\ln 1\right)$$
$$=\frac{243}{5}-2\ln 3-\frac{1}{5}+0=\frac{242}{5}-2\ln 3.$$

(3) $\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$;

解 $$\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times 4^{\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times 1^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{37}{6}-\frac{3\sqrt[3]{16}}{2}.$$

(4) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

解 $$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan 1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

(5) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

解 $$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\arcsin x\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

(6) $\int_0^1\frac{x^4+x^3+2}{x^2-1}\mathrm{d}x$;

解 $$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4+x^3+2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{1}{2}-1\right|-\ln\left|\frac{1}{2}+1\right|\right]-\left(\frac{0^3}{3}+0+\ln|0-1|-\ln|0+1|\right)$$

$=\dfrac{13}{24}-\ln 3.$

(7) $\displaystyle\int_{e-2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{2+x}$;

解 $\displaystyle\int_{e-2}^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{2+x}=\ln|2-3|-\ln|2-e-2|=-1.$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$;

解 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-(\tan 0-0)=1-\frac{\pi}{4}.$

(9) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$;

解 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x$

$\displaystyle=-\Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$\displaystyle=-\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(-\pi)\right]+\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=4.$

(10) $\displaystyle\int_0^1 xf'(x^2)\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int_0^1 xf'(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\Big[f(x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$

5. (1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=4x^3-3x^2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(1)$；

解 令 $A=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 将 $f(x)=4x^3-3x^2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 两边在区间 $[0,1]$ 上求定积分得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^3\mathrm{d}x-3A\int_0^1 x^2\mathrm{d}x,$$

即 $A=1-3A\times\dfrac{1}{3}$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$. 故 $f(1)=4-3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,10]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^{x^3+2}f(t)\mathrm{d}t=5+x^4$，求 $f(10)$；

解 将等式 $\displaystyle\int_0^{x^3+2}f(t)\mathrm{d}t=5+x^4$ 左右两边对 x 求导得

$$f(x^3+2)\cdot 3x^2=4x^3,$$

从而 $f(x^3+2)=\dfrac{4}{3}x$. 由 $x^3+2=10$ 得 $x=2$，从而 $f(10)=\dfrac{4}{3}\times 2=\dfrac{8}{3}$.

(3) 设 $f(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+3$，且 $f(x)$ 可导，$f(x)\neq 0$，求 $f(x)$.

解 由已知得 $f'(x)=2\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=2f(x)$，从而$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$，两边同时求不定积分得 $\ln f(x)=2x+C_1$，故 $f(x)=Ce^{2x}$. 由 $f(0)=3$ 得 $C=3$. 综上 $f(x)=3e^{2x}$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，求$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 设 $A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，对方程 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ 两边在区间$\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$上求定积分得

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-3\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}A\mathrm{d}x,$$

从而

$$A=\left[\arcsin x\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}A,$$

即 $A=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}A$，解得 $A=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{28}\pi$.

7. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的极值.

解 由已知可得 $f'(x)=\left[\int_0^{x^2}(t-1)\mathrm{d}t\right]'=(x^2-1)\cdot 2x=2x(x-1)(x+1)$，由$f'(x)=0$ 解得 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$. 又 $f''(x)=6x^2-2$，从而 $f''(-1)=4>0$，$f''(0)=-2<0$，$f''(1)=4>0$. 故 $f(x)$在 $x_1=-1$ 处取得极小值 $-\dfrac{1}{2}$；在 $x_2=0$ 处取得极大值0；在 $x_3=1$ 处取得极小值$-\dfrac{1}{2}$.

8. (1) 讨论方程 $x+1-\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=0$ 在区间(0，1)内的实根个数；

解 令 $f(x)=x+1-\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$，则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^3}>0(x\in(0,1))$，故 $f(x)$在(0，1)内单调递增. 又因为 $f(x)$在 $[0,1]$上连续且 $f(0)=1$，$f(1)=2-\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}>0$，故 $x+1-\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=0$ 在区间(0，1)内无实根.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\neq 0$，又 $F(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f^2(t)}\mathrm{d}t$，证明方程 $F(x)=0$ 在(a,b)内有且仅有一个实根.

证明 因为 $F'(x)=f^2(x)+\dfrac{1}{f^2(x)}>0$，故 $F(x)$在(a,b)内单调递增，因此 $F(x)=0$ 在(a,b)内至多有一个实根. 因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f^2(t)}\mathrm{d}t<0,\ F(b)=\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t>0,$$

由零点定理可知 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根. 综上，$F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个实根.

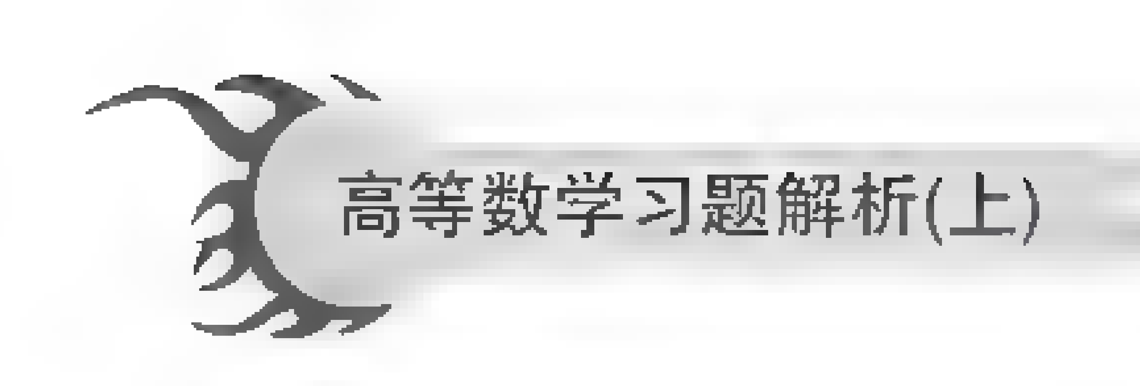
9. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^x \cos t\mathrm{d}t,\ x>0,\\ \dfrac{1}{2},\ x=0,\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2},\ x<0,\end{cases}$ 讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}$，且 $F(0)=\dfrac{1}{2}$，故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-2\cos x-x^2}{2x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x-2x}{6x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos x-2}{12x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\sin x}{12}=0,$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2x}\int_0^x \cos t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t\mathrm{d}t-x}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{4x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{4}=0,$$

故 $F'_-(0)=F'_+(0)$，因此 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.



5.3 定积分的换元积分法和分部积分法

5.3.1 知识点概况

1. 假设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，令函数 $x=\varphi(t)$，$t\in[\alpha, \beta]$，$\varphi(t)$在$[\alpha, \beta]$(或$[\beta, \alpha]$)上单调并具有连续导数，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这个公式叫做定积分的换元公式.

2. 设函数 $u(x)$、$v(x)$在区间$[a, b]$上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，由$(uv)'=u'v+uv'$得 $uv'=uv-u'v$，将其两端在区间$[a, b]$上积分得 $\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x$，或 $\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$. 这就是定积分的分部积分公式.

分部积分过程如下，$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x=\cdots$.

5.3.2 习题解答

1. 用换元积分法求下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$；

解 $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

(2) $\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(2+3x)^3}$；

解 $$\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(2+3x)^3}=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}(2+3x)}{(2+3x)^3}=-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(2+3x)^2}\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\frac{1}{6}\times\left[\frac{1}{(2+3\times2)^2}-\frac{1}{(2-3\times1)^2}\right]=\frac{21}{128}.$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$；

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\mathrm{d}(\sin x)=\left[\frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5-0^5\right]=\frac{\sqrt{2}}{40}.$$

(4) $\int_0^{\pi}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$；

解 $\int_0^{\pi}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\pi-\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)$

$$=\pi-\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}=\pi.$$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$；

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\mathrm{d}(2\theta)$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\left[\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(6) $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$；

解 令 $x=3\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=3\cos\theta\mathrm{d}\theta$，且当 $x=0$ 时，$\theta=0$；当 $x=3$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos\theta\cdot3\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{9}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\mathrm{d}(2\theta)\right]=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{9\pi}{4}.$$

(7) $\int_{\sqrt{3}}^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；

解 令 $x=2\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=2\cos\theta\mathrm{d}\theta$，且当 $x=\sqrt{3}$时，$\theta=\frac{\pi}{3}$；当 $x=2$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_{\sqrt{3}}^2\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta\cdot2\cos\theta}{4\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2\theta-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=\left[-\cot\theta-\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}.$$

(8) $\int_{-2}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

解 令 $x=\sec\theta$，则 $\mathrm{d}x=\sec\theta\cdot\tan\theta\mathrm{d}\theta$，且当 $x=-2$ 时，$\theta=\frac{2\pi}{3}$；当 $x=\sqrt{2}$时，$\theta=\frac{3\pi}{4}$，于是

$$\int_{-2}^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sec\theta\cdot\tan\theta}{\sec\theta\cdot|\tan\theta|}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sec\theta\cdot\tan\theta}{\sec\theta\cdot(-\tan\theta)}\mathrm{d}\theta=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{12}.$$

(9) $\int_{-1}^3\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x}}$；

解 令 $t=\sqrt{3+2x}$，则 $x=\frac{t^2-3}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，且当 $x=-1$ 时，$t=1$；当 $x=3$ 时，$t=3$，于是

$$\int_{-1}^3\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x}}=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2-3)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-3t\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\times 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-3\times 1\right)\right]=\frac{4}{3}.$$

(10) $\int_0^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}$;

解 $\int_0^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}(5-x^2)}{\sqrt{5-x^2}}=-\left[\sqrt{5-x^2}\right]_0^2=\sqrt{5}-1.$

(11) $\int_{-1}^0 xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$;

解 $\int_{-1}^0 xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-1}^0=\frac{1}{\sqrt{e}}-1.$

(12) $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{2+\ln^2 x}}\mathrm{d}x$;

解 $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{2+\ln^2 x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^e \frac{\mathrm{d}(2+\ln^2 x)}{\sqrt{2+\ln^2 x}}=\left[\sqrt{2+\ln^2 x}\right]_1^e=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

(13) $\int_{-1}^1 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$;

解
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 \frac{x+1+2}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}[(x+1)^2+1]}{(x+1)^2+1}+2\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)\\&=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2x+2)\right]_{-1}^1+2\left[\arctan(x+1)\right]_{-1}^1\\&=\frac{\ln 5}{2}+2\arctan 2.\end{aligned}$$

(14) $\int_{-2}^{-1} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$;

解 令 $x=\tan\theta-2$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$，且当 $x=-2$ 时，$\theta=0$；当 $x=-1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，于是

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}=\int_{-2}^{-1} \frac{x\mathrm{d}x}{[(x+2)^2+1]^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan\theta-2)\sec^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\mathrm{d}(2\theta)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{4}\left[\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}(2\theta)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}.$$

(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\mathrm{d}x$;

解 因为被积函数 $x^3\cos x$ 在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\mathrm{d}x=0.$

(16) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\mathrm{d}\theta$;

解 因为被积函数$\sin^4\theta$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上为偶函数，故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos2\theta d(2\theta) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos4\theta)d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left[\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos4\theta d(4\theta)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\left[\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

(17) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$；

解 $$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arccos x)^2 d(\arccos x) = -\frac{1}{3}\left[(\arccos x)^3\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 - \left(\frac{5\pi}{6}\right)^3\right] = \frac{31\pi^3}{162}.$$

(18) $\int_{-3}^{3} \frac{x^5\cos^2 x}{2x^6+3x^4+4x^2+5} dx$；

解 因为被积函数$\frac{x^5\cos^2 x}{2x^6+3x^4+4x^2+5}$在对称区间$[-3,3]$上为奇函数，故

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^5\cos^2 x}{2x^6+3x^4+4x^2+5} dx = 0.$$

(19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos 2x dx$；

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+2x)+\sin(x-2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{1}{6}[\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

(20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$；

解 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx$$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} d(\cos x) = -\frac{4}{3}\left[(\cos x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(21) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

解 令$x=\tan\theta$，则$dx=\sec^2\theta d\theta$，且当$x=1$时，$\theta=\frac{\pi}{4}$；当$x=\sqrt{3}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，于是

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta\sec\theta} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin\theta)}{\sin^2\theta} = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(22) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2\theta}d\theta$;

解 $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2\theta}d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta d\theta$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\sqrt{2}.$$

(23) $\int_0^3 \max\{x, x^3\}dx$.

解 $\int_0^3 \max\{x, x^3\}dx = \int_0^1 xdx + \int_1^3 x^3dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{41}{2}.$

2. 证明 $\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$.

证明 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，且当 $x=a$ 时，$t=\frac{1}{a}$；当 $x=1$ 时，$t=1$，于是

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}dt = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

3. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，证明 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

证明 令 $t=a+b-x$，即 $x=a+b-t$，从而 $dx=-dt$，且当 $x=a$ 时，$t=b$；当 $x=b$ 时，$t=a$，于是

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

4. 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$（其中 m，n 均为自然数）.

证明 令 $t=1-x$，即 $x=1-t$，从而 $dx=-dt$，且当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=1$ 时，$t=0$，于是

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^m t^n dt$$

$$= \int_0^1 t^n(1-t)^m dt = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

5. 用分部积分法求下列定积分：

(1) $\int_0^2 xe^{-2x}dx$;

解 $\int_0^2 xe^{-2x}dx = \int_0^2 xd\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x}dx$

$$= -\frac{1}{e^4} - \frac{1}{4}\int_0^2 e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{e^4} - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^4}.$$

(2) $\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x$;

解　$\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)=\left[\frac{x^3\ln x}{3}\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^3\mathrm{d}(\ln x)=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e=\frac{1}{9}(2e^3+1).$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos4x\mathrm{d}x$;

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos4x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left(\frac{\sin4x}{4}\right)=\frac{1}{4}\left[x\sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin4x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin4x\mathrm{d}(4x)=\frac{1}{16}\left[\cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$;

解　$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\sec^2x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\mathrm{d}(\tan x)=\left[x\tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi+\left[\ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{\ln2}{2}.$$

(5) $\int_1^8\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

解　$\int_1^8\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_1^8\ln x\mathrm{d}(x^{\frac{2}{3}})=\frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\ln x\right]_1^8-\frac{3}{2}\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}(\ln x)$

$$=18\ln2-\frac{3}{2}\int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=18\ln2-\frac{9}{4}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8=18\ln2-\frac{27}{4}.$$

(6) $\int_0^1 x^2\arctan x\mathrm{d}x$;

解　$\int_0^1 x^2\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\arctan x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left[x^3\arctan x\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}(\arctan x)$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\left[x^2\right]_0^1+\frac{1}{6}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{\ln2}{6}.$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x$;

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}(e^x)=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\mathrm{d}(\sin x)=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\mathrm{d}x$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(e^x)=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\mathrm{d}(\cos x)\right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \mathrm{d}x,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$.

(8) $\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x$;

解 $\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x = [x\cos(\ln x)]_1^e - \int_1^e x\mathrm{d}(\cos(\ln x)) = e\cos 1 - 1 + \int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

$= e\cos 1 - 1 + \left[x\sin(\ln x)\right]_1^e - \int_1^e x\mathrm{d}(\sin(\ln x)) = e\cos 1 - 1 + e\sin 1 - \int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x$,

故 $\int_1^e \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e\sin 1 + e\cos 1 - 1)$.

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\mathrm{d}x$;

解 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x\mathrm{d}x$

$$= -\left(\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 x\mathrm{d}(\ln x)\right) + \left(\left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x\mathrm{d}(\ln x)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{e} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \mathrm{d}x\right) + \left(e - \int_1^e \mathrm{d}x\right) = 2 - \frac{2}{e}.$$

5.4 广义积分

5.4.1 知识点概况

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b>a$. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义，此时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续，如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,(a<b)$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，如果广义积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x \text{ 和} \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两个广义积分的和为 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的广义积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

如果上式右端有一个广义积分发散，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散. 上述广义积分称为

无穷限的广义积分.

2. 广义积分的计算，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}[F(x)]_a^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}F(b) - F(a) = \lim_{x\to+\infty}F(x) - F(a).$$

可采用如下简记形式：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}F(x) - F(a).$$

类似地 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x\to-\infty}F(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}F(x) - \lim_{x\to-\infty}F(x).$$

3. 如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(为无穷间断点). 无界函数的广义积分又称为瑕积分.

4. 广义积分的计算，如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b = F(b) - \lim_{t\to a^+}F(t) = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x).$$

可采用如下简记形式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x).$$

类似地，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-}F(x) - F(a),$$

当 a 为瑕点时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x)$；

当 b 为瑕点时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b^-}F(x) - F(a)$.

当 $c\,(a<c<b)$ 为瑕点时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = [\lim_{x\to c^-}F(x) - F(a)] + [F(b) - \lim_{x\to c^+}F(x)].$$

5. 含参变量 $s\,(s>0)$ 的广义积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

称为 Γ 函数.

5.4.2 习题解答

1. 计算下列广义积分的值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$；

解 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^3}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

解 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}[2\sqrt{x}]_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2)=+\infty$，故广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$发散.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$;

解 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^2}\int_0^b\frac{d(e^{x-1})}{e^{2x-2}+1}=\frac{1}{e^2}\lim\limits_{b\to+\infty}[\arctan e^{x-1}]_0^b$

$$=\frac{1}{e^2}\lim\limits_{b\to+\infty}(\arctan e^{b-1}-\arctan e^{-1})=\frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{e}\right).$$

(4) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$;

解 $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}[e^{-x^2}]_0^b$

$$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}(e^{-b^2}-1)=\frac{1}{2}.$$

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx$;

解 $\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}d(-3x)=-\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}[e^{-3x}]_0^b$

$$=-\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to+\infty}(e^{-3b}-1)=\frac{1}{3}.$$

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$;

解 $\int_1^b\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int_1^b\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\int_1^b\frac{dx}{1+x}+\int_1^b\frac{dx}{1+x^2}-\int_1^b\frac{xdx}{1+x^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left([\ln(1+x)]_1^b+[\arctan x]_1^b-\frac{1}{2}\int_1^b\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\ln(1+b)-\ln 2+\arctan b-\arctan 1-\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_1^b\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\ln(1+b)-\ln 2+\arctan b-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}+\arctan b-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)$，故

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}+\arctan b-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}\right)+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\arctan b-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

(7) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

解 $\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^b\sin x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=[-\mathrm{e}^{-x}\sin x]_0^b+\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\sin x)$

$=-\mathrm{e}^{-b}\sin b+\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-b}\sin b+\int_0^b\cos x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})$

$=-\mathrm{e}^{-b}\sin b-[\mathrm{e}^{-x}\cos x]_0^b+\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\cos x)=-\mathrm{e}^{-b}\sin b-\mathrm{e}^{-b}\cos b+1-\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$,故

$\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{-b}}{2}(\sin b+\cos b)+\frac{1}{2}$,于是

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-b}}{2}(\sin b+\cos b)+\frac{1}{2}\right]$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{\sin b}{2\mathrm{e}^b}-\lim_{b\to+\infty}\frac{\cos b}{2\mathrm{e}^b}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$;

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$

$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$

$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1}$

$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan(x+2)]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan(x+2)]_0^b$

$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan 2-\arctan(a+2)]+\lim_{b\to+\infty}[\arctan(b+2)-\arctan 2]$

$=\arctan 2+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arctan 2=\pi.$

(9) $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{t\to2^-}\int_0^t\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to2^-}\int_0^t\frac{\mathrm{d}(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}=-\lim_{t\to2^-}[\sqrt{4-x^2}]_0^t$

$$=-\lim_{t\to2^-}(\sqrt{4-t^2}-2)=2.$$

(10) $\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^2}$；

解 $\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^2} = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{dx}{(2-x)^2} = -\lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{d(2-x)}{(2-x)^2} = \lim_{b\to 2^-}\left[\frac{1}{2-x}\right]_0^b$

$= \lim_{b\to 2^-}\left(\frac{1}{2-b}-\frac{1}{2}\right)=+\infty.$

(11) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$；

解 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{t\to 1^+}[\ln(\ln x)]_t^2$

$= \lim_{t\to 1^+}[\ln(\ln 2)-\ln(\ln t)]=+\infty$，故 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ 发散.

(12) $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$.

解 先求 $\int_t^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$

令 $\sqrt{1+x}=u$，则 $x=u^2-1$，$dx=2udu$，且当 $x=t$ 时，$u=\sqrt{1+t}$；$x=0$ 时，$u=1$，于是

$\int_t^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{1+t}}^1 \frac{(u^2-1)}{u}\cdot 2udu = 2\int_{\sqrt{1+t}}^1 (u^2-1)du = 2\left[\frac{u^3}{3}-u\right]_{\sqrt{1+t}}^1$

$= 2\left[\frac{1}{3}-1-\frac{(\sqrt{1+t})^3}{3}+\sqrt{1+t}\right]=-\frac{4}{3}-\frac{2(\sqrt{1+t})^3}{3}+2\sqrt{1+t}$，故

$\int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{t\to(-1)^+}\int_t^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = \lim_{t\to(-1)^+}\left[-\frac{4}{3}-\frac{2(\sqrt{1+t})^3}{3}+2\sqrt{1+t}\right]=-\frac{4}{3}.$

2. 求瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 的瑕点.

解 积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 的可能瑕点是 $x=0$ 与 $x=1$. 因为

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$，$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$，所以 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$ 的瑕点为 $x=0$.

3. 当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 发散？当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 取得最小值？

解 $\int \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} \begin{cases} \ln|\ln x|+C, & k=1, \\ -\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}, & k\neq 1, \end{cases}$

故当 $k>1$ 时，广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛，此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^k}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]_2^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}b}+\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}2}\right]=\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}2};$$

当 $k\leqslant1$ 时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^k}$ 发散.

令 $f(k)=\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}2}$，则 $f'(k)=\frac{1+(k-1)\ln\ln2}{(k-1)^2\ln^{k-1}2}$，令 $f'(k)=0$，得 $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$.

当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln2}$时，$f'(k)<0$；当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln2}$时，$f'(k)>0$，故 $k=1-\frac{1}{\ln\ln2}$为函数 $f(k)$的最小值点，最小值为$(\ln\ln2)(\ln x)^{\frac{1}{\ln\ln2}}$.

4. 用 Γ 函数表示下列积分，并指出这些积分的收敛范围：

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\,(n>0)$；

解 令 $u=x^n$，则 $x=u^{\frac{1}{n}}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$，于是

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$，故当 $n>0$ 时原广义积分收敛.

(2) $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$；

解 令 $u=\ln\frac{1}{x}$，则 $x=\mathrm{e}^{-u}$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$，于是

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^0 u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(p+1)$$，故当 $p>-1$ 时原广义积分收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x\,(n\neq0)$.

解 令 $u=x^n$，则 $x=u^{\frac{1}{n}}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$，于是当 $n>0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right);$$

当 $n<0$ 时，$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，

综上，$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\left|\frac{1}{n}\right|\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$，当$\frac{m+1}{n}>0$ 时，原广义积分收敛.

5. 证明下列各式(其中 $n\in\mathbf{N}_+$)：

(1) $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$；

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$；

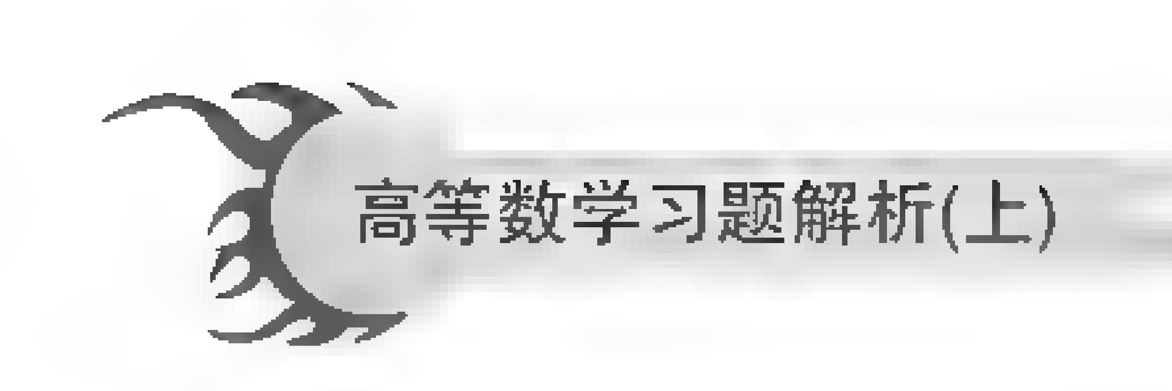
(3) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$.

证明 (1) $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right)$

$$=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(2) $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

(3) $2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.



5.5 定积分的应用

5.5.1 知识点概况

1. 为求某一量 U，先将此量分布在某一区间 $[a, b]$ 上，分布在 $[a, x]$ 上的量用函数 $U(x)$ 表示，再求这一量的元素 $\mathrm{d}U(x)$，设 $\mathrm{d}U(x)=u(x)\mathrm{d}x$ 然后以 $u(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，以 $[a, b]$ 为积分区间求定积分即得

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

用这一方法求一量的值的方法称为微元法(或元素法).

2. 直角坐标系下平面图形的面积

设平面图形由上下两条曲线 $y=f_{上}(x)$ 与 $y=f_{下}(x)$ 及左右两条直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成，则面积元素为 $[f_{上}(x)-f_{下}(x)]\mathrm{d}x$，于是平面图形的面积为

$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]\mathrm{d}x.$$

类似地，由左右两条曲线 $x=\varphi_{左}(y)$ 与 $x=\varphi_{右}(y)$ 及上下两条直线 $y=d$ 与 $y=c$ 所围成设平面图形的面积为



$$S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]\mathrm{d}y.$$

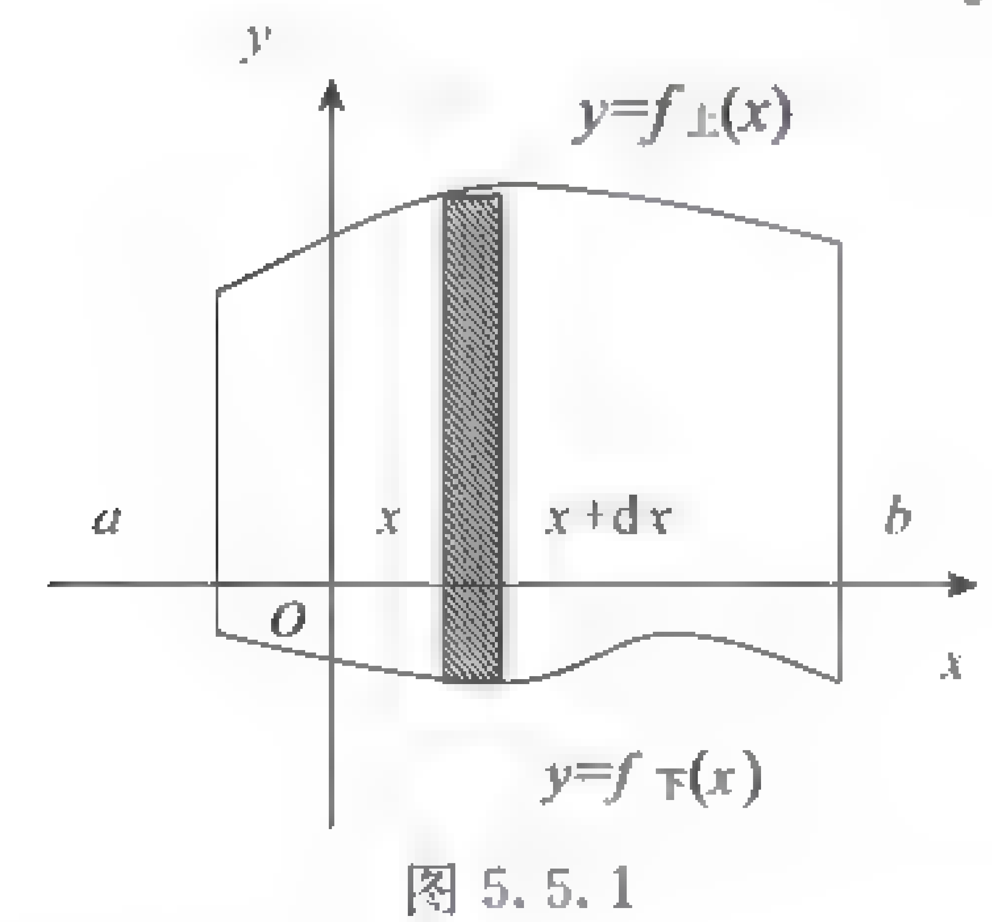


图 5.5.1

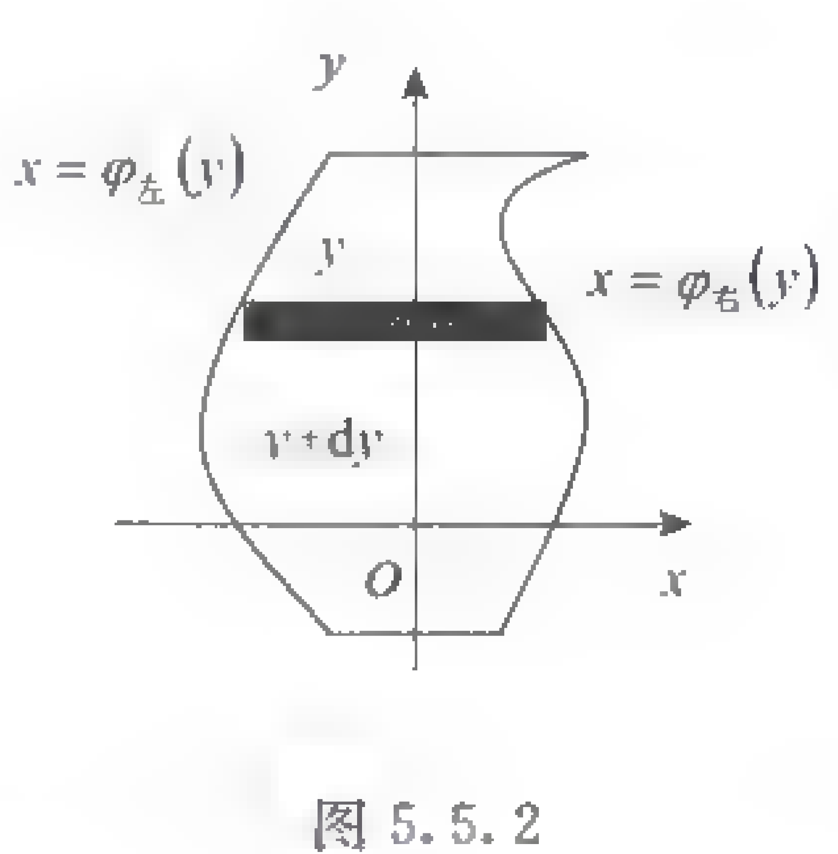


图 5.5.2

3. 极坐标情形

由顶点在圆心的角的两边和这两边所截一段圆弧围成的图形叫扇形，扇形面积公式为

$$A=\frac{1}{2}R^2\theta.$$

由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的图形称为曲边扇形. 因不能保证 $\rho=\varphi(\theta)$ 为圆弧，所以不能直接适用扇形面积公式.

应用微元法，由极点引出射线将曲边扇形进行分割，形成若干小的曲边扇形，当切割足够

小时，将每个小曲边扇形近似看作扇形，应用扇形面积公式求出近似值，之后累加，求极限.

通过上面的叙述，可以写出曲边扇形的面积元素为 $dS=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta$. 曲边扇形的面积为

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2d\theta.$$

4. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴.

常见的旋转体：圆柱、圆锥、圆台、球体.

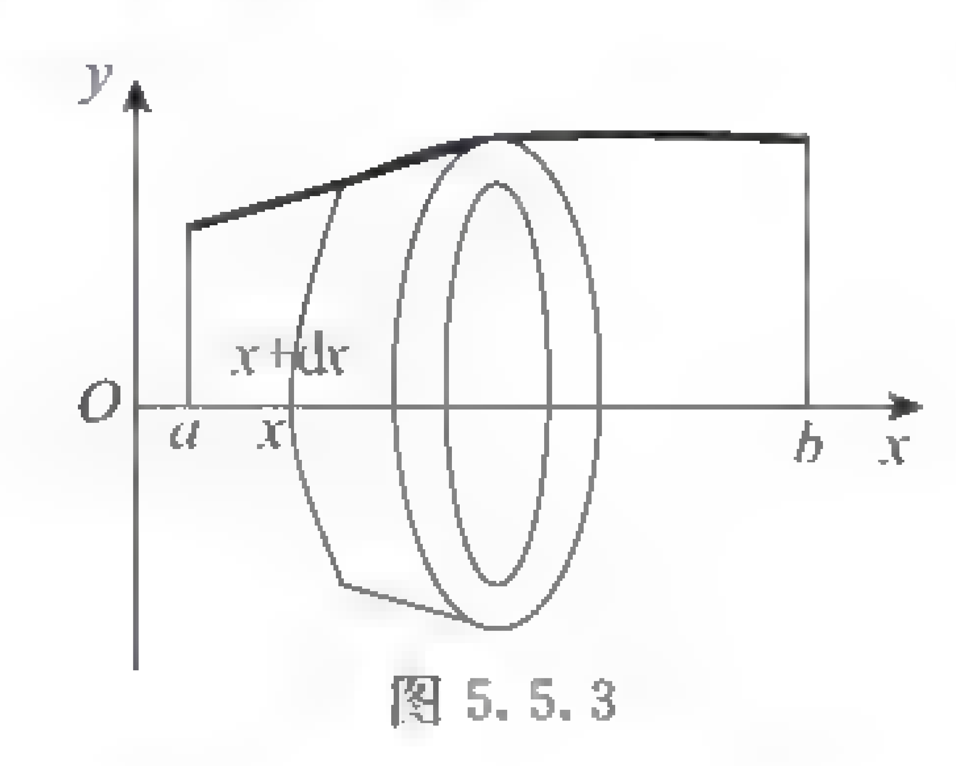


图 5.5.3

旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$a=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

设过区间$[a, b]$内点 x 且垂直于 x 轴的平面左侧的旋转体的体积为 $V(x)$. 当平面左右平移 dx 后，体积的增量近似为 $\Delta V=\pi[f(x)]^2dx$，于是体积元素为 $dV=\pi[f(x)]^2dx$.

旋转体的体积为 $V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx$.

5. 平行截面面积为已知的立体的体积

设立体在 x 轴的投影区间为$[a, b]$，过点 x 且垂直于 x 轴的平面与立体相截，截面面积已知，记为 $A(x)$，则体积元素为 $A(x)dx$，立体的体积为 $V=\int_a^bA(x)dx$.

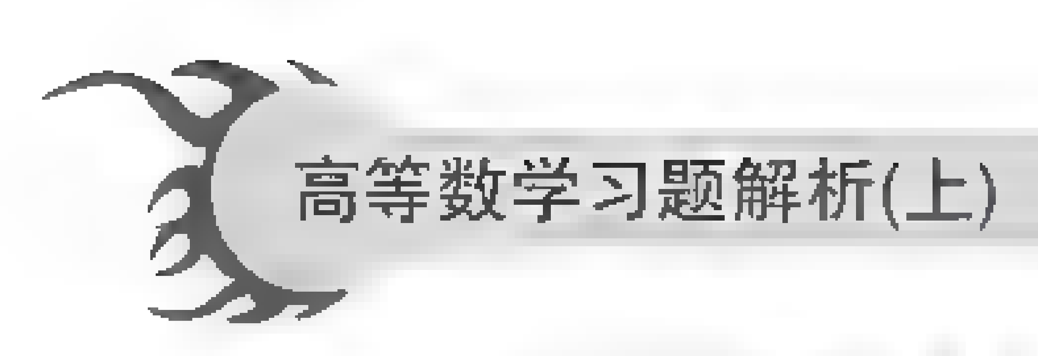
6. 设 A，B 是曲线弧上的两个端点. 在弧 AB 上任取分点，

$$A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$$

并依次连接相邻的分点得一内接折线. 当分点的数目无限增加且每个小段 $M_{i-1}M_i$ 都缩向一点时，如果此折线的长 $\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧 AB 的弧长，并称此曲线弧 AB 是可求长的.

7. 设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$给出，其中 $f(x)$在区间$[a, b]$上具有一阶连续导数. 曲线弧的长度为 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

8. 设曲线弧由参数方程 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)(a\leqslant t\leqslant b)$给出，其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数. 曲线弧的长度为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$.

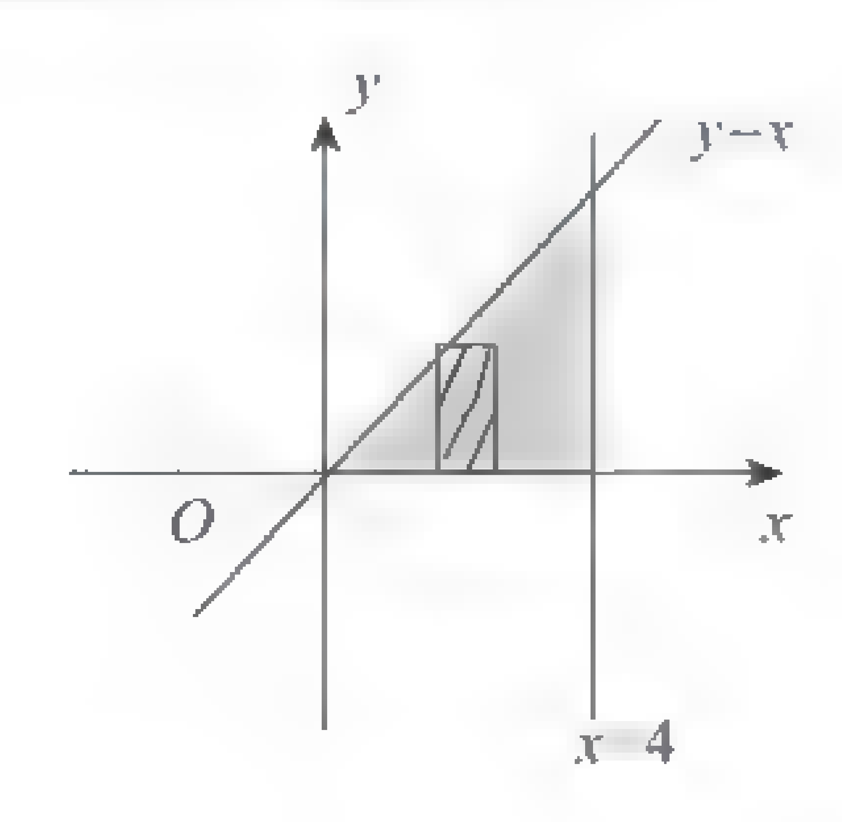


9. 设曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)(a\leqslant\theta\leqslant b)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数．曲线弧的长度为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

5.5.2　习题解答

1. 用定积分计算由直线 $y=x$，直线 $x=4$ 及 x 轴所围成图形的面积.

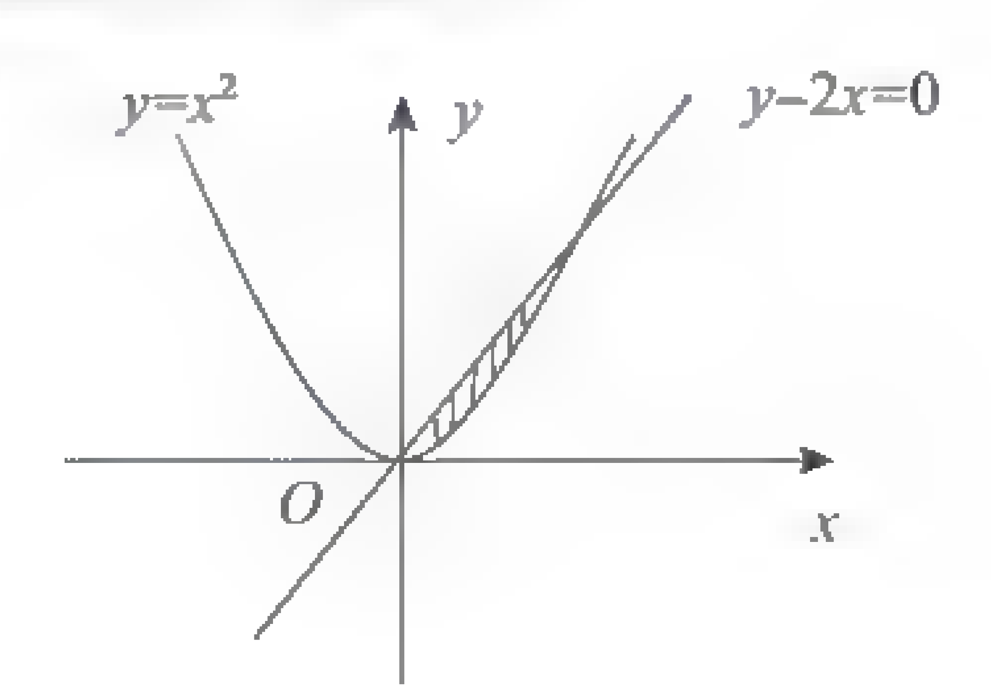
解　这两条直线与 x 轴所围成图形如下图所示：



解方程组 $\begin{cases}y=x\\x=4\end{cases}$，得两条直线的交点坐标为(4，4)．取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为[0，4]，相应于[0，4]上的任一小区间所对应的窄条面积近似的高为 x，底为 $\mathrm{d}x$ 的矩形的面积．从而得到其面积元素为 $\mathrm{d}A=x\mathrm{d}x$，以 $x\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在[0，4]内作定积分．所求图形面积为：$A=\int_0^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^4=8$.

2. 计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y-2x=0$ 所围成图形的面积.

解　由抛物线与直线所围成图形如下图所示：

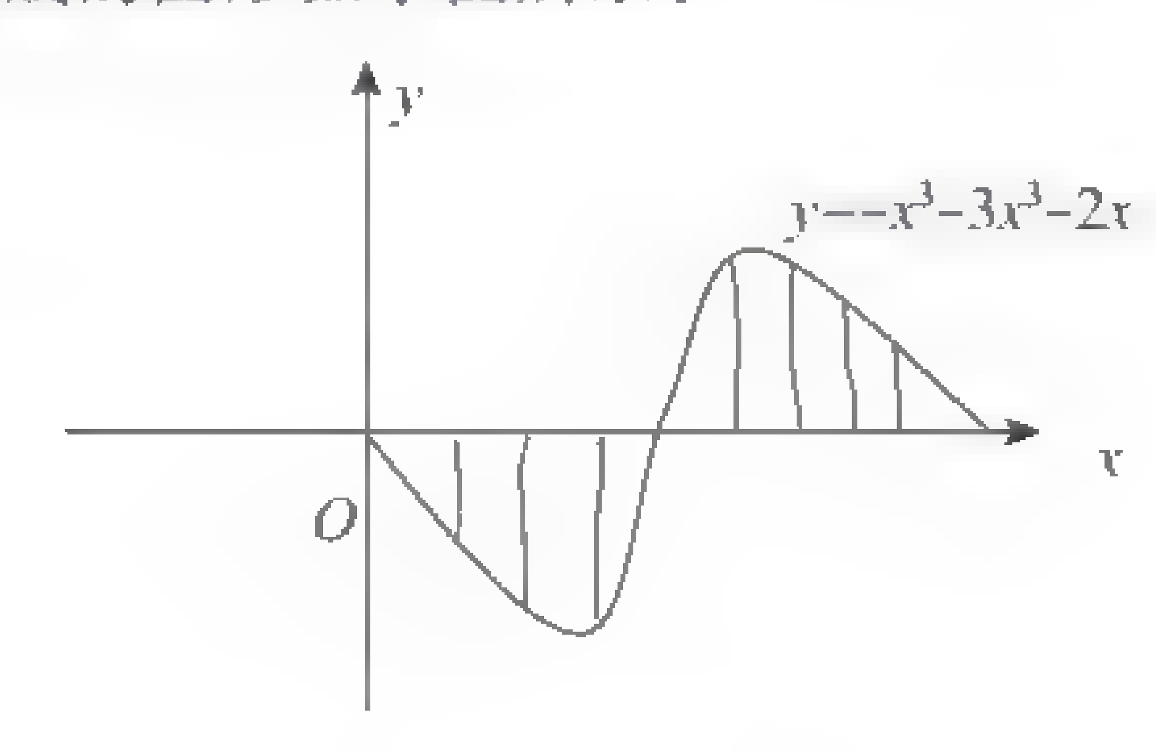


先求出这两条线的交点，为此解方程组 $\begin{cases}y=x^2,\\y-2x=0,\end{cases}$ 得到其两个交点坐标分别为(0，0)与(2，4)．取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为[0，2]，相应于[0，2]上的任一小区间所对应的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}x$，底为 $2x-x^2$ 的矩形的面积．从而得到面积元素为 $\mathrm{d}A=(2x-x^2)\mathrm{d}x$，以 $(2x-x^2)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在[0，2]内作定积分，所求图形面积为

$$A=\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=4-\frac{1}{3}\times8=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

3. 求曲线 $y=-x^3+3x^2-2x$ 与 x 轴所围成图形的面积.

解 该曲线与 x 轴所围成的图形如下图所示：



曲线 $y=-x^3+3x^2-2x$ 与 x 轴的交点坐标为(0，0)，(1，0)与(2，0)，且当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $1<x<2$ 时，$y>0$. 取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为[0，2]，该曲线与 x 轴所围图形的面积是其在区间[0，1]上与 x 轴所围图形面积的 2 倍，[0，1]上的任一小区间所对应的窄条面积近似于高为 $-(-x^3+3x^2-2x)$，底为 dx 的矩形的面积，从而得到其面积元素为 $dA_1=-(-x^3+3x^2-2x)dx$，在[1，2]上的任一小区间所对应的窄条面积近似于高为 $-x^3+3x^2-2x$，底为 dx 的矩形的面积，从而得到其面积元素为 $dA_2=(-x^3+3x^2-2x)dx$，所以所求面积为

$$A=A_1+A_2=-\int_0^1(-x^3+3x^2-2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right)\Big|_0^1+\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right)\Big|_1^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

4. 求由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 与直线 $x=2$ 及 $y=2$ 所围成图形的面积.

解 因为 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2(x>0)$，故面积元素为 $dA=\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx$，解方程组 $\begin{cases}y=x+\frac{1}{x},\\ y=2,\end{cases}$ 得曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 与直线 $y=2$ 的交点坐标为(1，2). 取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为[1，2]. 因为面积元素为 $dA=\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx$，故所求图形面积为

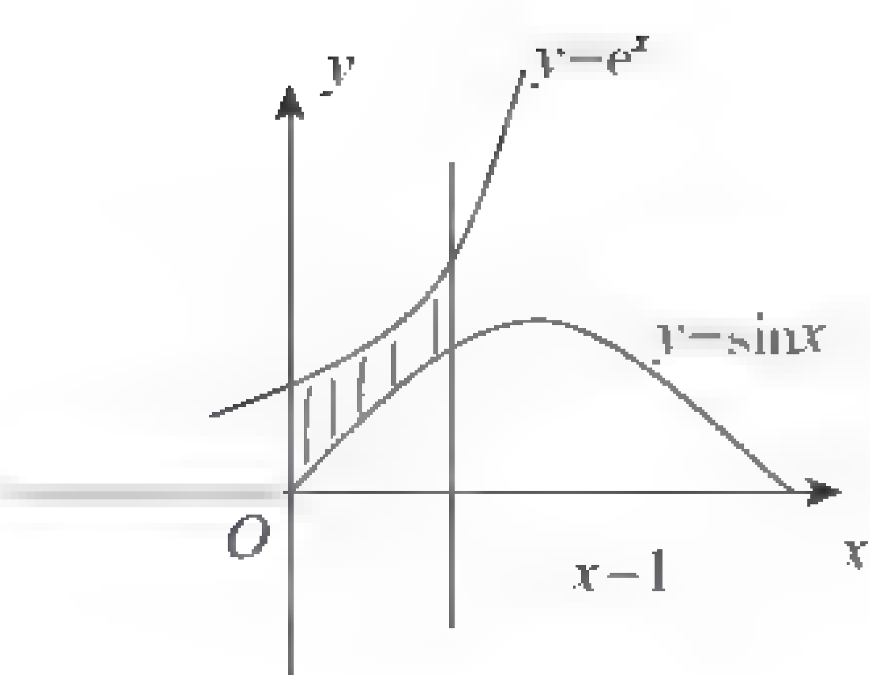
$$A=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

5. 求曲线 $y=e^x$，$y=\sin x$ 与直线 $x=0$ 和 $x=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所成立体的体积.

解 如下图所示，所求的旋转所成的立体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-\sin^2 x)dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}(e^2-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\right]=\pi\left[\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{1}{2}\sin 2\right)-1\right]=\frac{\pi}{2}\left(e^2+\frac{1}{2}\sin 2\right)-\pi.$$



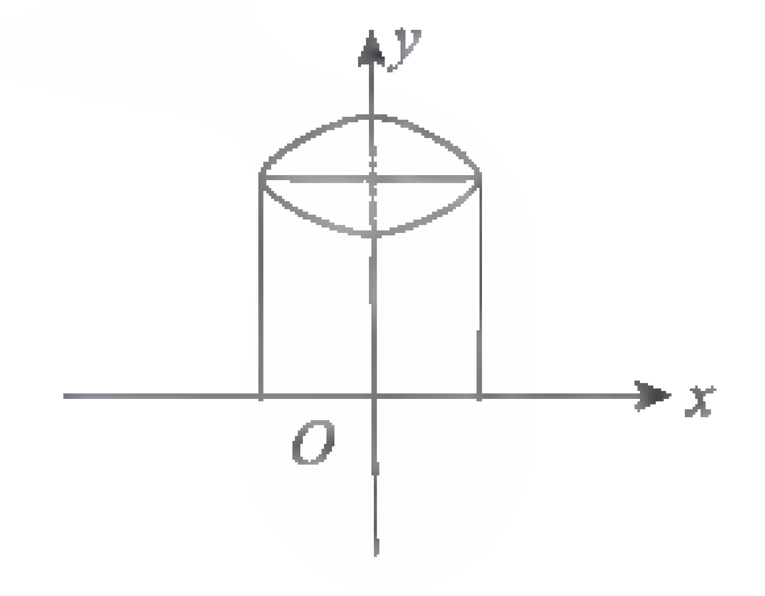
6. 求星形线$\begin{cases} x=a\cos^3\varphi, \\ y=a\sin^3\varphi, \end{cases}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ a>0)$的全长.

解 因为$x'(\varphi)=-3a\cos^2\varphi\sin\varphi$，$y'(\varphi)=3a\sin^2\varphi\cos\varphi$，故弧长元素为

$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)}=\sqrt{(-3a\cos^2\varphi\sin\varphi)^2+(3a\sin^2\varphi\cos\varphi)^2}=3a|\sin\varphi\cos\varphi|$，$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. 所求弧长为 $s=\int_0^{2\pi}3a|\sin\varphi\cos\varphi|\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}12a\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=6a$.

7. 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2\ (0<a<b)$绕 x 轴旋转一周得到的立体体积.

解 如右图所示，所求的立体体积为



$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=8b\pi\left(\frac{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a=2a^2b\pi^2.$$

8. 计算悬链线 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$在$[0,t]$上的一段弧长.

解 $y'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$，弧长元素为

$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2)}\mathrm{d}x$，从而弧长为

$$s=\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^t(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}).$$

9. 计算悬链线 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$在$[0,t]$上的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 取 x 为积分变量，$x\in[0,t]$，所求的旋转体体积为

$$V=\pi\int_0^t\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})+\frac{t\pi}{2}.$$

5.6 总习题解答

1. 填空题

(1) 函数 $f(x)$在$[a, b]$上有界是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的_______条件.

(2) 函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续是 $f(x)$在$[a, b]$上可积的_______条件.

(3) 若函数 $f(x)$在$[a, b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a, b]$上可积，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ _______ 存在.

(4) 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(x)\geqslant g(x)$，则$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 的几何意义为_______.

(5) 设函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为_______.

解 (1) 必要. (2) 充分. (3)未必.

(4) 由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的图形的面积.

(5) 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而得到的旋转体的体积.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-\frac{i}{n}}$；

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x)=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$
$$=\frac{2}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^q+2^q+\cdots+n^q}{n^{q+1}}(q>0)$；

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^q+2^q+\cdots+n^q}{n^{q+1}}=\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^q=\int_0^1 x^q\mathrm{d}x=\frac{1}{q+1}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$；

解 令 $F(x)=x^m\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=a^m f(a).$$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\int_x^0\arctan t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-2}}$.

解 先证所求极限为$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式. 因为当$x<\tan(-1)$时，$\arctan x<-1$，令

$c=\int_{\tan(-1)}^{0}\arctan t\mathrm{d}t$，则当$x<\tan(-1)$时有

$\int_{x}^{0}\arctan t\mathrm{d}t=c+\int_{x}^{\tan(-1)}\arctan t\mathrm{d}t<c-\int_{x}^{\tan(-1)}\mathrm{d}t=c+x-\tan(-1)\to-\infty\ (x\to-\infty)$，由洛必达法则有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\int_{x}^{0}\arctan t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\int_{x}^{0}\arctan t\mathrm{d}t\right)'}{(\sqrt{x^2-2})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\arctan x}{\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}}=-\frac{\pi}{2}.$$

3. 设$x>0$，证明$\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

证明 令$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则当$x>0$时，

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$，故当$x>0$时，$f(x)\equiv C$.

又因为$f(1)=2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$，故$C=\frac{\pi}{2}$.

4. 设$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上都连续，证明：

(1) $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$(柯西—施瓦茨不等式)；

证明 对任意实数λ，有$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant0,$$

上述不等式的左边是关于λ的二次多项式，它非负的条件是其判别式非正，即

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant0,$$

从而$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$(闵可夫斯基不等式)；

证明 $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b[f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left\{\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2,$$

从而 $\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

(3) 若 $f(x)>0$，则 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2$.

证明　由柯西—施瓦茨不等式，有

$$\left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right]^2 \leqslant \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 dx,$$

即 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2$.

5. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{x-\cos x}dx$；

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{x-\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x-\cos x)}{x-\cos x}dx = \Big[\ln|x-\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{\pi}{2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$；

解　$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x+\cos x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$，

其中：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x+\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx \xlongequal{u=\frac{\pi}{4}-x} -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\ln\sqrt{2}+\ln\cos u)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u du = \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi\ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx = \frac{\pi\ln 2}{8}$.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$；

解　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x| dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$$

$$= \Big[\sin x+\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2|\sin x|dx$；

解　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2|\sin x|dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x^2\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

$=-\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2(\pi-2).$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$；

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(e^x)}{e^{2x}+1}=\left[\arctan e^x\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$

(6) $\int_0^3 f(x-2)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x^2}, & x\geq 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$

解 令 $u=x-2$，则当 $x=0$ 时，$u=-2$；$x=3$ 时，$u=1$，于是

$$\int_0^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-2}^0 f(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-2}^0\frac{1}{1+e^u}\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-2}^0\frac{e^{-u}}{1+e^{-u}}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\int_{-2}^0\frac{\mathrm{d}(1+e^{-u})}{1+e^{-u}}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+u^2)}{1+u^2}$$

$$=-\left[\ln(1+e^{-u})\right]_{-2}^0+\frac{1}{2}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1=\ln(1+e^2)-\frac{1}{2}\ln 2.$$

6.（积分第一中值定理）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续不变号. 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

成立.

证明 不妨设 $g(x)\geq 0$，故 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geq 0$. 因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值性定理，其在 $[a,b]$ 上存在最小值 m 与最大值 M. 从而

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

于是

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x=M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$，由上述不等式可知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，故结论成立.

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$，则 $m<\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}<M$，由闭区间上连续函数的介值性定理，存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

从而结论成立.

第6章　微分方程初步

6.1　微分方程的基本概念

6.1.1　知识点概况

1. 一般地，凡表示未知函数、未知函数的各阶导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程. 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫微分方程的阶.

2. 根据未知函数所含变量的个数可将微分方程分为两类：常微分方程及偏微分方程，未知函数是一元函数的微分方程，叫常微分方程. 未知函数是多元函数的微分方程，叫偏微分方程.

3. 一般的，n 阶微分方程形如：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0 \text{ 或 } y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}),$$

满足微分方程的函数(把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫做该微分方程的解. 确切地说，设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，

$$F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x))=0,$$

那么函数 $y=f(x)$ 就叫做微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解.

4. 如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解. 通解的意义是指它包含微分方程所有的解.

5. 由于通解中含有任意常数项，所以不能唯一确定函数关系，用于确定通解中任意常数项取值的条件，称为初始条件. 通过初始条件确定了通解中的任意常数以后，就确定了唯一的函数关系，即得到微分方程的特解. 即不含任意常数的解. 将求微分方程满足初始条件的解的问题称为初值问题. 求微分方程 $y'=f(x, y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题，记为

$$\begin{cases} y'=f(x, y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}.$$

6. 微分方程特解的图形是一条曲线，将其称为微分方程的积分曲线. 通解的图形是一族积分曲线，称为积分曲线族.

6.1.2 习题解答

1. 请指出下列微分方程的阶数.

(1) $e^x (y')^3+2yy'+2x=0$;

(2) $x^3y'''+xy''+\sin x=0$;

(3) $(y'')^3-xy'+y=0$;

(4) $(3x+y)dx+(2x-1)dy=0$;

(5) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+xy\dfrac{dy}{dx}+x-y=0$;

(6) $\rho\dfrac{d^3\rho}{d\theta^3}+\theta\dfrac{d\rho}{d\theta}+1-\rho=0$.

解 (1)一阶;(2)三阶;(3)二阶;(4)一阶;(5)二阶;(6)三阶.

2. 判断下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy'=3y$, $y=6x^3$;

解 是. 由 $y=6x^3$, 得 $y'=18x^2$, 于是 $xy'=x\cdot 18x^2=18x^3=3y$.

(2) $y''+y'-6y=3xe^{2x}(5x+2)$; $y=x^3e^{2x}$;

解 是. 由 $y=x^3e^{2x}$, 得 $y'=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}$,

$y''=6xe^{2x}+6x^2e^{2x}+6x^2e^{2x}+4x^3e^{2x}=6xe^{2x}+12x^2e^{2x}+4x^3e^{2x}$, 于是

$y''+y'-6y=6xe^{2x}+12x^2e^{2x}+4x^3e^{2x}+3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}-6x^3e^{2x}=3xe^{2x}(5x+2)$.

(3) $y''+y=0$, $y=2\sin x+3\cos x$;

解 是. 由 $y=2\sin x+3\cos x$, 得 $y'=2\cos x-3\sin x$, $y''=-2\sin x-3\cos x$, 于是

$y''+y=-2\sin x-3\cos x+2\sin x+3\cos x=0$.

(4) $y''-(a+b)y'+aby=0$, $y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}$, 其中 a, b, C_1, C_2 均为常数.

解 是. 由 $y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}$, 得 $y'=C_1ae^{ax}+C_2be^{bx}$, $y''=C_1a^2e^{ax}+C_2b^2e^{bx}$, 于是

$y''-(a+b)y'+aby=C_1a^2e^{ax}+C_2b^2e^{bx}-(a+b)(C_1ae^{ax}+C_2be^{bx})+ab(C_1e^{ax}+C_2e^{bx})=0$.

3. 验证下列二元方程所确定的函数为所给微分方程的解.

(1) $(x^3-4xy)y'=2y^2-3x^2y-2x$, $x^2+x^3y-2xy^2=C$;

证明 将方程 $x^2+x^3y-2xy^2=C$ 两边同时对 x 求导, 得

$2x+3x^2y+x^3y'-2y^2-4xyy'=0$, 即 $(x^3-4xy)y'=2y^2-3x^2y-2x$.

(2) $(x^2y-x^2)y''+x^2(y')^2+2x(y-2)y'=2y$, $y=\ln(x^2y)$.

证明 将方程 $y=\ln(x^2y)$ 两边同时对 x 求导, 得 $y'=\dfrac{2xy+x^2y'}{x^2y}$, 即

$(x^2y-x^2)y'=2xy$, 再将上式两端同, 时对 x 求导, 得

$(2xy+x^2y'-2x)y'+(x^2y-x^2)y''=2y+2xy'$, 即

$(x^2y-x^2)y''+x^2(y')^2+2x(y-2)y'=2y$.

4. 确定下列函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件．

(1) $3x^3+y^2=C$，$y|_{x=0}=3$；

解　由$y|_{x=0}=3$，将 $x=0$，$y=3$ 代入函数关系中，得 $C=9$.

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$；

解　由 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，得 $y'=(C_2+3C_1+3C_2x)e^{3x}$.

将 $x=0$，$y=1$ 代入 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$，得 $C_1=1$；

将 $x=0$，$y'=2$ 代入 $y'=(C_2+3C_1+3C_2x)e^{3x}$，得 $C_2=-1$.

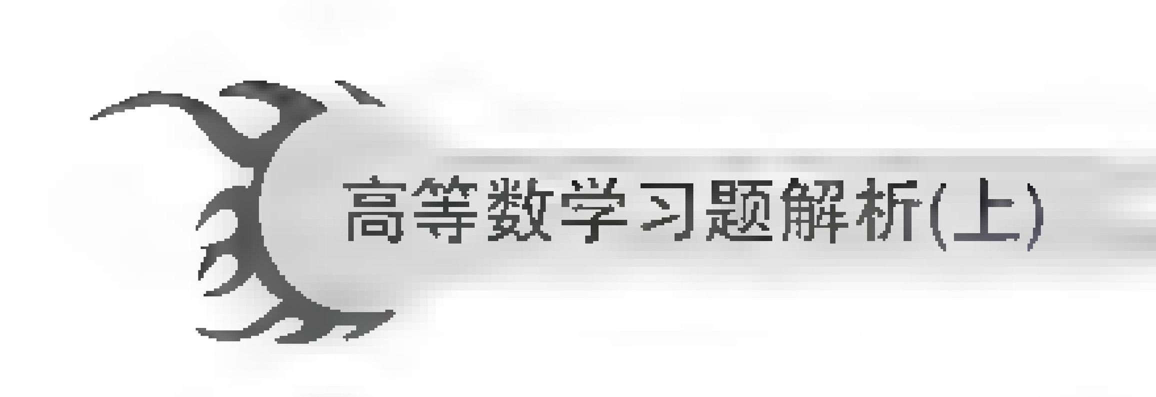
(3) $y=C_1\cos(x+C_2)$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$，$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

解　由 $y=C_1\cos(x+C_2)$，得 $y'=-C_1\sin(x+C_2)$.

将 $x=\frac{\pi}{2}$，$y=0$ 代入 $y=C_1\cos(x+C_2)$，得 $0=C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+C_2\right)$……①；

将 $x=\frac{\pi}{2}$，$y'=1$ 代入 $y'=-C_1\sin(x+C_2)$，得 $1=-C_1\sin\left(\frac{\pi}{2}+C_2\right)$……②，

①^2+②^{2}得 ${C_1}^2=1$，从而 $C_1=\pm1$. 当 $C_1=1$ 时，解得 $C_2=2k\pi$，故 $y=\cos x$；当 $C_1=-1$ 时，结果相同.



6.2　一阶微分方程

6.2.1　知识点概况

1. 一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y')=0$.

或者

$$y'=f(x, y).$$

有时也写成如下对称形式：

$$P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0.$$

若把 x 看作自变量、y 看作未知函数，则当 $Q(x, y)\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

若把 y 看作自变量、x 看作未知函数，则当 $P(x, y)\neq 0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

2. 一般地，如果一阶微分方程 $y'=\varphi(x, y)$ 能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

3. 可分离变量方程解法是微分方程中最基础的解法之一．很多微分方程最后均归结为可分离变量方程，将可分离变量的微分方程的解法总结如下：

第一步　分离变量，将方程写成 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的形式；

第二步　两端积分：$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$，设积分后得 $G(y)=F(x)+C$；

第三步　所求 $G(y)=F(x)+C$ 或它所确定的函数 $y=\Phi(x)$、$x=\psi(y)$，他们都可作为方程的通解，其中 $G(y)=F(x)+C$ 称为隐式(通)解.

4. 如果一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x, y)$ 中的函数 $f(x, y)$ 可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，如 $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则称这方程为齐次方程.

5. 在齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中，令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$，对等式两边进行求导．因为 u 是 x 的函数，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u.$$

原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

求出积分后，再用$\frac{y}{x}$代替 u，便得所给齐次方程的通解.

当方程可以化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$时，也是齐次微分方程，将原方程写成$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\varphi\left(\frac{x}{y}\right)}$，这时可令$\frac{x}{y}=u(y)$，注意此时要假定 u 是 y 的函数，则 $x=u(y)\cdot y$，等式两边求 y 的导数后$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y+u$.

原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y+u=\frac{1}{\varphi(u)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\varphi(u)}-u$$

它为可分离变量方程，化简为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{\varphi(u)}-u}=\mathrm{d}y$$

两端积分，得

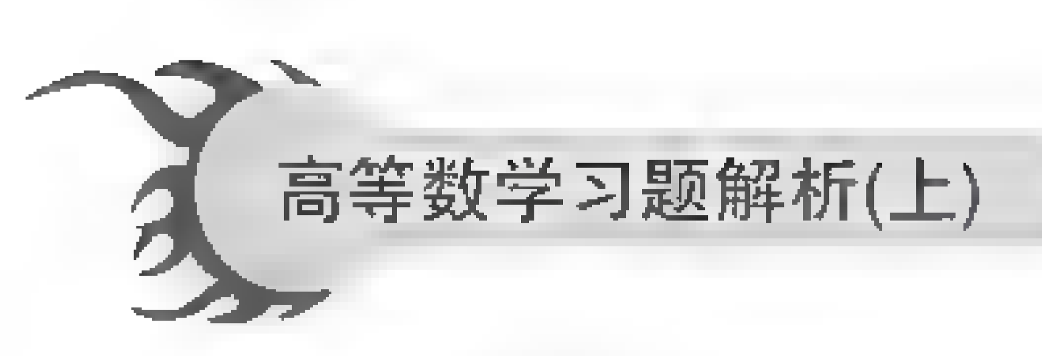
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{\varphi(u)}-u}=\int\mathrm{d}y$$

求出积分后，再用$\frac{x}{y}$代替 u，便得所给齐次方程的通解.

6. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\ y=Q(x)$$

的方程，叫做一阶线性微分方程. 其特点是方程中关于未知函数 y 及其导数均是一次式，注意与自变量 x 的函数 $P(x)$、$Q(x)$形式无关. 如果 $Q(x)=0$，则方程称为齐次线性方程，否则方程称为非齐次线性方程.



7. 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

的方程为一阶齐次线性方程. 该方程是变量可分离方程. 分离变量后得$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$，两边积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1 \quad \text{或}\ y=Ce^{-\int P(x)dx}(C=\pm e^{C_1})$$

这就是齐次线性方程的通解(积分中不再加任意常数).

8. 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

其中，$Q(x)\neq0$，将其称为一阶非齐次线性微分方程，而方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

其左边项与所求非齐次方程左边项完全一致，所以将其称为对应于非齐次线性方程的齐次线性方程.

9. 一阶非齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

即

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

于是，一阶非齐次线性方程的通解＝对应的齐次线性方程的通解＋非齐次线性方程的一个特解.

10. 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq0,\ 1)$$

的方程，叫做伯努利方程.

严格来说，伯努利方程不是一阶线性微分方程，因为存在 y^n，它属于一阶高次微分方程，但是经过变量替换后该方程可转化为一阶非齐次线性微分方程，进而可以进行求解.

11. 一个一阶微分方程写成

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$$

形式后，如果它的左端恰好是某一个函数 $u=u(x,\ y)$的全微分：

$$du(x,\ y)=P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

那么方程 $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$ 就叫做全微分方程. 这里

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y),$$

而方程可写为 $\mathrm{d}u(x,\ y)=0$.

12. 若 $P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

则方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程.

13. 若方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程，且

$$\mathrm{d}u(x,\ y)=P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y$$

则

$$u(x,\ y)=C$$

即

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}x=C((x_0,y_0)\in G)$$

是方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

14. 若方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 不是全微分方程，但存在一函数 $\mu=\mu(x,\ y)$ $(\mu(x,\ y)\neq 0)$，使方程 $\mu(x,\ y)P(x,\ y)\mathrm{d}x+\mu(x,\ y)Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程，则函数 $\mu(x,\ y)$叫做方程 $P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子.

6.2.2　习题解答

1. 求下列可分离变量微分方程的通解.

(1) $xy'=y\ln y$；

解　原方程为 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln y$，分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得 $\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln C_1(C_1>0)$，整理得 $\ln y=\pm C_1x$，令 $C=\pm C_1$，从而原方程的通解为 $\ln y=Cx$，即 $y=\mathrm{e}^{Cx}$.

(2) $4y'+x^3+x^2+5=0$；

解　原方程可写为 $y'=-\frac{1}{4}(x^3+x^2+5)$，两端积分 $y=-\frac{1}{4}\int(x^3+x^2+5)\mathrm{d}x$，解得 $y=-\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+5x\right)+C$.

(3) $(1+x^2)y'=1+y^2$；

解　原方程为$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$，分离变量，得$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，两端积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，得 $\arctan y=\arctan x+C$.

(4) $y'-2xy'=y^3$；

解　原方程可写为$(1-2x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^3$，分离变量，得$\frac{\mathrm{d}y}{y^3}=\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$，两端积分

$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dx}{1-2x}$，得 $-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C_1$，整理得 $y^2 = \frac{1}{\ln|1-2x| + C}$.

(5) $\csc^2 x \cot y dx - \csc^2 y \cot x dy = 0$；

解 分离变量，得 $\frac{\csc^2 y}{\cot y} dy = \frac{\csc^2 x}{\cot x} dx$，两端积分 $\int \frac{\csc^2 y}{\cot y} dy = \int \frac{\csc^2 x}{\cot x} dx$，凑微分得 $\int \frac{d(\cot y)}{\cot y} dy = \int \frac{d(\cot x)}{\cot x}$，解得 $\ln|\cot y| = \ln|\cot x| + \ln C_1 (C_1 > 0)$，整理得 $\ln\left|\frac{\cot y}{\cot x}\right| = \ln C_1$，即 $\frac{\cot y}{\cot x} = \pm C_1$，令 $C = \pm C_1$，原方程的通解为 $\cot y = C\cot x$.

(6) $\frac{dy}{dx} = 2^{3x+y}$；

解 分离变量，得 $\frac{dy}{2^y} = 8^x dx$，两端积分 $\int \frac{dy}{2^y} = \int 8^x dx$，解得 $-\frac{1}{2^y \ln 2} = \frac{8^x}{3\ln 2} + C_1$，整理得 $8^x + 2^{-y} = -C_1 \ln 2$，令 $C = -C_1 \ln 2$，原方程的通解为 $8^x + 2^{-y} = C$.

(7) $(e^{x+y} + e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$；

解 分离变量，得 $\frac{e^x}{e^x+1}dx = -\frac{e^y}{e^y+1}dy$，两端积分 $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = -\int \frac{e^y}{e^y+1}dy$，凑微分得 $\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\int \frac{d(e^y+1)}{e^y+1}$，解得 $\ln(e^x+1) = -\ln(e^y+1) + \ln C (C > 0)$，整理得 $(e^x+1)(e^y+1) = C$.

(8) $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$；

解 分离变量，得 $\frac{\sin y}{\cos y} dy = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$，两端积分 $\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$，凑微分得 $\int \frac{d(\cos y)}{\cos y} dy = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$，解得 $\ln|\cos y| = -\ln|\cos x| + \ln C_1$，整理得 $|\cos y \cos x| = C_1$，即 $\cos y \cos x = \pm C_1$，令 $C = \pm C_1$，原方程的通解为 $\cos y \cos x = C$.

(9) $y^3 \frac{dy}{dx} + (x+1)^2 = 0$；

解 分离变量，得 $y^3 dy = -(x+1)^2 dx$，两端积分 $\int y^3 dy = -\int (x+1)^2 dx$，解得 $\frac{y^4}{4} = -\frac{(x+1)^3}{3} + C_1$，整理得 $3y^4 + 4(x+1)^3 = 12C_1$，令 $C = 12C_1$，原方程的通解为 $3y^4 + 4(x+1)^3 = C$.

2. 求下列齐次方程的通解.

(1) $xy' - y - 2\sqrt{y^2 - x^2} = 0$；

解 当 $x > 0$ 时，原方程可写成 $y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$，令 $u = \frac{y}{x}$，即 $y = xu$，有 $y' = u + xu'$，则原方程成为 $u + xu' = u + 2\sqrt{u^2 - 1}$，整理并分离变量，得

$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{2dx}{x}$，两端积分 $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=2\int\frac{dx}{x}$，解得 $\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|=2\ln|x|+\ln C_1$，整理得 $u+\sqrt{u^2-1}=\pm C_1x^2$，令 $C=\pm C_1$，得 $u+\sqrt{u^2-1}=Cx^2$. 将 $u=\frac{y}{x}$代入上式并整理，原方程的通解为 $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^3$.

(2) $3x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$；

解　原方程可写成$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}\ln\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，有$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，则原方程成为 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{3}\ln u$，分离变量，得$\frac{du}{u(\ln u-3)}=\frac{dx}{x}$，两端积分 $\int\frac{du}{u(\ln u-3)}=\int\frac{dx}{x}$，凑微分得 $\int\frac{d(\ln u-3)}{\ln u-3}=\int\frac{dx}{x}$，解得 $\ln|\ln u-3|=\ln|x|+\ln C_1$，整理得 $\ln u=\pm C_1x+3$，令 $C=\pm C_1$，得 $\ln u=Cx+3$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，原方程的通解为 $\ln\frac{y}{x}=Cx+3$.

(3) $(x^2+y^2)dx+xydy=0$；

解　原方程可写成$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dx+dy=0$，令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $dy=udx+xdu$，则原方程成为 $\left(\frac{1}{u}+u\right)dx+udx+xdu=0$，整理并分离变量，得 $\frac{udu}{1+2u^2}=-\frac{dx}{x}$，两端积分 $\int\frac{udu}{1+2u^2}=-\int\frac{dx}{x}$，解得$\frac{1}{4}\ln(1+2u^2)=-\ln|x|+\ln C_1$，整理得 $x\sqrt[4]{1+2u^2}=\pm C_1$，令 $C_2=\pm C_1$，得 $x\sqrt[4]{1+2u^2}=C_2$. 将 $u=\frac{y}{x}$代入上式并整理，得 $x^4+2x^2y^2=C_2^4$，令 $C=C_2^4>0$，原方程的通解为 $x^4+2x^2y^2=C$.

(4) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$；

解　原方程可写成$(1+e^{\frac{x}{y}})\frac{dx}{dy}+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)=0$. 令 $u=\frac{x}{y}$，即 $x=yu$，有$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，则原方程成为$(1+e^u)\left(u+y\frac{du}{dy}\right)+e^u(1-u)=0$，整理并分离变量得$\frac{1+e^u}{u+e^u}du=-\frac{1}{y}dy$，两端积分 $\int\frac{1+e^u}{u+e^u}du=-\int\frac{1}{y}dy$，解得 $\ln(u+e^u)=-\ln|y|+\ln C_1$，整理得 $y(u+e^u)=\pm C_1$，令 $C=\pm C_1$，得 $y(u+e^u)=C$. 将 $u=\frac{x}{y}$代入上式并整理，原方程的通解为 $ye^{\frac{x}{y}}+x=C$.

(5) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.

解　令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，有 $y'=u+xu'$，则原方程成为 $u+xu'=u+\frac{1}{u}$，整理并分离变

量得 $u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分 $\int u\mathrm{d}u=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解得 $u^2=-2\ln|x|-C$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式并整理，原方程的通解为 $y^2=-2x^2(\ln|x|+C)$.

3. 求下列一阶线性微分方程的通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\mathrm{e}^x$；

解 $y=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\left(\int \mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+C\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{3}+\frac{C}{\mathrm{e}^{2x}}$.

(2) $xy'+y=x^3+4x-5$；

解 原方程可写成 $y'+\frac{1}{x}y=x^2+4-\frac{5}{x}$，则其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\left(x^2+4-\frac{5}{x}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int\left(x^2+4-\frac{5}{x}\right)x\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x^3+4x-5)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+2x^2-5x+C\right)=\frac{x^3}{4}+2x-5+\frac{C}{x}.$$

(3) $y'-y\sin x=\mathrm{e}^{\cos x}$；

解 $y=\mathrm{e}^{\int\sin x\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\int\sin x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\cos x}\left(\int\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\cos x}(x+C)$.

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\tan x=-\sec x$；

解 $y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(-\int\sec x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln|\cos x|}\left(-\int\sec x\mathrm{e}^{-\ln|\cos x|}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\cos x\left(-\int\sec^2x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x(-\tan x+C)=-\sin x+C\cos x.$$

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=5$；

解 $y=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int 5\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\left(\int 5\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{5}{2}+C\mathrm{e}^{-2x}$.

(6) $y'\cos x+y\sin x=3\sin x\cos^2x$；

解 原方程可写成 $y'+y\tan x=\frac{3}{2}\sin 2x$，则其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\frac{3}{2}\int\sin 2x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(3\int\cos x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x(3\sin x+C)$$

$$=3\sin x\cos x+C\cos x.$$

(7) $(x^2-1)y'+2xy+\sin x=0$；

解 原方程可写成 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=-\frac{\sin x}{x^2-1}$，则其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(-\int\frac{\sin x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x^2-1}\left(-\int\sin x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{\cos x+C}{x^2-1}.$$

(8) $(x-\ln y)\mathrm{d}y-y\ln y\mathrm{d}x=0$；

解　原方程可写成$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y\ln y}=-\frac{1}{y}$，则其通解为

$$x=e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left(-\int\frac{1}{y}e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C\right)=\ln y\left(-\int\frac{1}{y\ln y}dy+C\right)=\ln y(-\ln|\ln y|+C).$$

(9) $(x-3)\frac{dy}{dx}=y-4(x-3)^2$.

解　原方程可写成$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x-3}=-4(x-3)$，则其通解为

$$y=e^{\int\frac{1}{x-3}dx}\left[-4\int(x-3)e^{-\int\frac{1}{x-3}dx}dx+C\right]=(x-3)\left(-4\int dx+C\right)$$
$$=(12x-4x^2)+C(x-3).$$

4. 求下列伯努利方程的通解.

(1) $\frac{dy}{dx}-y=y^2(\sin x+\cos x)$;

解　原方程可写成$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y}=\sin x+\cos x$，令$z=\frac{1}{y}$，即$y=\frac{1}{z}$，则$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}$，于是原方程可化为$\frac{dz}{dx}+z=-\sin x-\cos x$，故$z=e^{-\int dx}\left[-\int(\sin x+\cos x)e^{\int dx}dx+C\right]$

$$=e^{-x}\left[-\int(\sin x+\cos x)e^x dx+C\right]=e^{-x}\left[-\int e^x\sin x dx-\int e^x\cos x dx+C\right],$$

其中$\int e^x\sin x dx=\int\sin x d(e^x)=e^x\sin x-\int e^x d(\sin x)=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$，从而$\int e^x\sin x dx+\int e^x\cos x dx=e^x\sin x$. 故$z=-\sin x+Ce^{-x}$. 将$z=\frac{1}{y}$代入上式并整理，原方程的通解为$y^{-1}=-\sin x+Ce^{-x}$.

(2) $\frac{dy}{dx}+xy=2xy^2$;

解　原方程可写成$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=2x$，令$z=\frac{1}{y}$，即$y=\frac{1}{z}$，则$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}$，于是原方程可化为$z^2\left(-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)+xz=2x$，整理并分离变量，得$\frac{dz}{z-2}=x dx$，两端积分$\int\frac{dz}{z-2}=\int x dx$，解得$z=Ce^{\frac{x^2}{2}}+2$. 将$z=\frac{1}{y}$代入上式并整理，原方程的通解为$y^{-1}=Ce^{\frac{x^2}{2}}+2$.

(3) $\frac{dy}{dx}+2y=(2+3x)y^4$;

解　原方程可写成$\frac{1}{y^4}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{2}{y^3}=2+3x$，令$z=\frac{1}{y^3}$，则$\frac{dz}{dx}=-\frac{3}{y^4}\cdot\frac{dy}{dx}$，于是原方程可化为$\frac{dz}{dx}-6z=-6-9x$，其通解为$z=e^{\int 6dx}\left[-\int(6+9x)e^{-\int 6dx}dx+C\right]$，解之得

$$z=\frac{5}{4}+\frac{3x}{2}+Ce^{6x}.$$ 将$z=\frac{1}{y^3}$代入上式并整理，原方程的通解为$y^{-3}=\frac{5}{4}+\frac{3x}{2}+Ce^{6x}$.

(4) $\frac{dy}{dx}+2y=xy^5$.

解 原方程可写成$\frac{1}{y^5}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{2}{y^4}=x$，令$z=\frac{1}{y^4}$，则$\frac{dz}{dx}=-\frac{4}{y^5}\cdot\frac{dy}{dx}$，于是原方程可化为$\frac{dz}{dx}-8z=-4x$，其通解为$z=e^{\int 8dx}\left(-\int 4xe^{-\int 8dx}dx+C\right)$，解得$z=\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+Ce^{8x}$.

5. 判断下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解.

(1) $(3x^2+2xy^2)dx+(2x^2y+y^2)dy=0$；

解 这里$P(x,y)=3x^2+2xy^2$，$Q(x,y)=2x^2y+y^2$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=4xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(2x^2y+y^2)dy=C$，即$x^3+x^2y^2+\frac{y^3}{3}=C$.

(2) $(2xy+y^2)dx+(x+y)^2dy=0$；

解 这里$P(x,y)=2xy+y^2$，$Q(x,y)=(x+y)^2$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\int_0^x 0dx+\int_0^y(x+y)^2dy=C_1$，即$3x^2y+3xy^2+y^3=C$，其中$C=3C_1$.

(3) $e^ydx+(xe^y+y^2)dy=0$；

解 这里$P(x,y)=e^y$，$Q(x,y)=xe^y+y^2$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\int_0^x e^0dx+\int_0^y(xe^y+y^2)dy=C$，即$xe^y+\frac{y^3}{3}=C$.

(4) $(x\cos y-\cos x)y'+y\sin x+\sin y=0$；

解 原方程可变形为$(x\cos y-\cos x)dy+(y\sin x+\sin y)dx=0$，这里

$P(x,y)=y\sin x+\sin y$，$Q(x,y)=x\cos y-\cos x$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\sin x+\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\int_0^x 0dx+\int_0^y(x\cos y-\cos x)dy=C$，即$x\sin y-y\cos x=C$.

(5) $y(x+2y)dx-x^2dy=0$；

解 这里$P(x,y)=y(x+2y)$，$Q(x,y)=-x^2$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=x+4y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x$，所以此方程不是全微分方程.

(6) $(1+e^{-2\theta})d\rho-2\rho e^{-2\theta}d\theta=0$；

解 这里$P(\rho,\theta)=1+e^{-2\theta}$，$Q(\rho,\theta)=-2\rho e^{-2\theta}$. 因为$\frac{\partial P}{\partial \theta}=-2e^{-2\theta}=\frac{\partial Q}{\partial \rho}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\int_0^\rho 2d\rho-\int_0^\theta 2\rho e^{-2\theta}d\theta=C$，即$\rho(1+e^{-2\theta})=C$.

(7) $(x^2-y^2)dx+xydy=0$.

解　这里 $P(x, y)=x^2-y^2$，$Q(x, y)=xy$. 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=-2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=y$，所以此方程不是全微分方程.

6. 利用观察法求出下列方程的积分因子，并求其通解.

(1) $(x-y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$;

解　方程两边同时乘以$\frac{1}{x-y}$，得 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{x-y}$，即 $\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}\ln(x-y)$，所以$\frac{1}{x-y}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为 $x+y=\ln(x-y)+C$.

(2) $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y-xy^2\mathrm{d}x=0$;

解　方程两边同时乘以$\frac{1}{y^2}$，得$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}-x\mathrm{d}x=0$，即 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+\mathrm{d}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$，所以$\frac{1}{y^2}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为$\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}=C$.

(3) $y^3(x-3y)\mathrm{d}x+(1-3xy^3)\mathrm{d}y=0$;

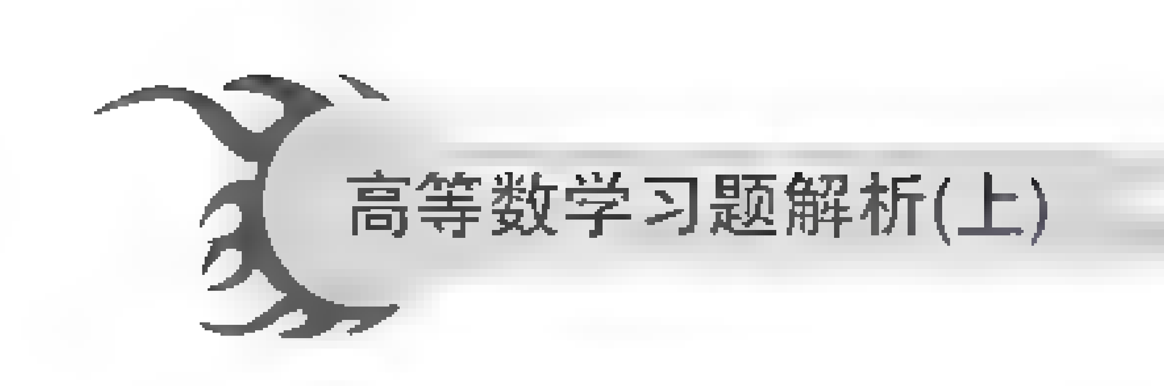
解　原方程可变形为 $xy^3\mathrm{d}x-3y^4\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-3xy^3\mathrm{d}y=0$，两边同时乘以$\frac{1}{y^3}$并整理得 $x\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{y^3}-3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$，即 $\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2y^2}\right)-3\mathrm{d}(xy)=0$，所以$\frac{1}{y^3}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2y^2}-3xy=C$.

(4) $2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=(x^2+y^2)\mathrm{d}x$;

解　方程两边同时乘以$\frac{1}{x^2+y^2}$，得$\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}[\ln(x^2+y^2)]-\mathrm{d}x=0$，所以$\frac{1}{x^2+y^2}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为 $x^2+y^2=Ce^x(C\geqslant 0)$.

(5) $(x^2-y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$.

解　原方程可变形为 $x^2\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$，两边同时乘以$\frac{1}{x^2}$，得 $\mathrm{d}x+\frac{2xy\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x}{x^2}=0$，即 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x}\right)=0$，所以$\frac{1}{x^2}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为 $x^2+y^2=Cx$.



6.3 二阶微分方程

6.3.1 知识点概况

1. $y''=f(x, y')$型的微分方程

这类方程的特点是，方程中不显含未知函数 y，所以依据这一特点将其称为"缺 y 型"微分方程. 求解这一类方程的思想是，因为 y''是 y'的一阶导数，所以，如果把 y'作为新的未知函数，就可把原方程降阶为一阶微分方程，从而求出 y'，再进行一次积分运算，就可将未知函数 y 求出.

设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，于是方程化为

$$p'=f(x, p)$$

它为一阶微分方程，设 $p'=f(x, p)$的通解为 $p=\varphi(x, C_1)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x, C_1)$$

原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2.$$

2. $y''=f(y, y')$型的微分方程

这类方程的特点是方程中不显含未知函数 x. 所以依据这一特点将其称为"缺 x 型"微分方程. 这时可做变换 $y'=p(y)$，有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=f(y, p),$$

设方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y, p)$的通解为 $y'=p=\varphi(y, C_1)$，则原方程的通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y, C_1)}=x+C_2.$$

3. 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

若方程右端 $f(x)=0$ 时，方程称为齐次的，否则称为非齐次的.

4. 如果函数 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是方程的解，其中 C_1、C_2 是任意常数.

5. 设 $y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$为定义在区间 I 上的 n 个函数. 如果存在 n 个不全为零的常数 k_1，k_2，…，k_n 使得当 $x\in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$$

成立，那么称这 n 个函数在区间 I 上线性相关；否则称为线性无关. 对于两个函数，它们线性相关与否，只要看它们的比是否为常数，如果比为常数，那么它们就线性相关，否则就线性无关.

6. 如果函数 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

的两个线性无关的解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)(C_1\text{、}C_2\text{ 是任意常数})$$

是方程的通解.

7. 如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$是方程

$$y_1^{(n)}+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的 n 个线性无关的解，那么，此方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中 C_1，C_2，…，C_n 为任意常数.

8. 二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)\ y=f(x)$$

即
$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)\ y=f(x),$$

我们把方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)\ y=0$$

叫做非齐次方程对应的齐次方程.

9. 设 $y^*(x)$是二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)\ y=f(x)$$

的一个特解，$Y(x)$是对应的齐次方程的通解，那么

$$y=Y(x)+y^*(x)$$

是二阶非齐次线性微分方程的通解.

10. 设非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)\ y=f(x)$的右端是 $f(x)$几个函数之和，如

$$y''+P(x)y'+Q(x)\ y=f_1(x)+f_2(x),$$

而 $y_1^*(x)$与 $y_2^*(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)与y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

11. 形如

$$y''+py'+qy=0$$

的方程，称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中 p、q 均为常数.

12. 求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的步骤为：

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$；

第二步　求出特征方程的两个根 r_1、r_2；

第三步　根据特征方程的两个根的不同情况，写出微分方程的通解.

13. 微分方程的通解有以下三种不同的情形：

(1) 特征方程有两个不相等的实根 r_1、r_2 时，函数 $y_1=e^{r_1x}$、$y_2=e^{r_2x}$ 是方程的两个线性无关的解. 因此方程的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2) 特征方程有两个相等的实根 $r_1=r_2$ 时，函数 $y_1=e^{r_1x}$、$y_2=xe^{r_1x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个线性无关的解. 因此方程的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}.$$

(3) 特征方程有一对共轭复根 r_1，$r_2=\alpha\pm i\beta$ 时，函数 $y=e^{(\alpha+i\beta)x}$、$y=e^{(\alpha-i\beta)x}$ 是微分方程的两个线性无关的复数形式的解. 函数 $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$、$y=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 是微分方程的两个线性无关的实数形式的解. 因此方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

14. 形如

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

的方程，称为 n 阶常系数齐次线性微分方程，其中 p_1，p_2，…，p_{n-1}，p_n 都是常数.

引入微分算子 D，及微分算子的 n 次多项式：

$$L(D)=D^n+p_1D^{n-1}+p_2D^{n-2}+\cdots+p_{n-1}D+p_n,$$

则 n 阶常系数齐次线性微分方程可记作

$$(D^n+p_1D^{n-1}+p_2D^{n-2}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0\text{ 或 }L(D)y=0.$$

n 阶常系数齐次线性微分方程的特征方程：

$$L(r)=r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

称为微分方程 $L(D)y=0$ 的特征方程.

特征方程的根与通解中项的对应关系如下：

(1) 单实根 r 对应于一项：Ce^{rx}；

(2) 一对单复根 $r_{1,2}=\pm(\alpha+i\beta)$，对应于两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

(3) k 重实根 r 对应于 k 项：$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$；

(4) 一对 k 重复根 $r_{1,2}=\pm\alpha+\mathrm{i}\beta$ 对应于 $2k$ 项：

$\mathrm{e}^{\alpha x}((C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x)$.

15. 形如

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的方程，称为二阶常系数非齐次线性微分方程，其中 p、q 是常数.

二阶常系数非齐次线性微分方程的通解是对应的齐次方程的通解 $Y(x)$ 与非齐次方程本身的一个特解 $y^*(x)$ 之和：$y=Y(x)+y^*(x)$.

(1) $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根，依次取为 0、1 或 2. 上述结论推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，k 与 λ 的重根次数一致.

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 的特解形式

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的特解可设为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R^{(1)}{}_m(x)\cos\omega x+R^{(2)}{}_m(x)\sin\omega x]$$

其中 $R^{(1)}{}_m(x)$、$R^{(2)}{}_m(x))$ 是 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$，而 k 按 $\lambda+\mathrm{i}\omega$(或 $\lambda-\mathrm{i}\omega$)不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1.

6.3.2　习题解答

1. 求下列可降阶的二阶微分方程的通解：

(1) $y''=x^2+\cos x$；

解　$y'=\int(x^2+\cos x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\sin x+C_1$，

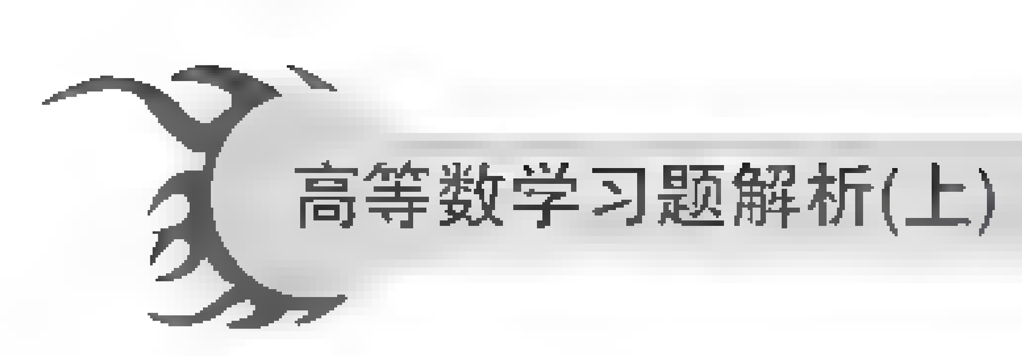
$$y=\int\left(\frac{x^3}{3}+\sin x+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{12}-\cos x+C_1x+C_2.$$

(2) $y''=x^2\mathrm{e}^{3x}$；

解　$$y'=\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right)=\frac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(x^2)=\frac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int x\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right)=\frac{x^2\mathrm{e}^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{x\mathrm{e}^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{27}(9x^2\mathrm{e}^{3x}-6x\mathrm{e}^{3x}+2\mathrm{e}^{3x})+C_1,$$



$$y=\frac{1}{27}\int(9x^2e^{3x}-6xe^{3x}+2e^{3x})+\int C_1\mathrm{d}x=\frac{1}{27}\left[9\int x^2e^{3x}\mathrm{d}x-6\int xe^{3x}\mathrm{d}x+2\int e^{3x}\mathrm{d}x\right]+C_1x$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(3x^2e^{3x}-2xe^{3x}+\frac{2}{3}e^{3x}\right)-\left(2xe^{3x}-\frac{2}{3}e^{3x}\right)+\frac{2}{3}e^{3x}\right]+C_1x+C_2$$

$$=\frac{1}{27}(3x^2e^{3x}-4xe^{3x}+2e^{3x})+C_1x+C_2.$$

(3) $y''=\dfrac{2}{1+x^2}$；

解 $y'=2\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\arctan x+C_1$，

$$y=\int(2\arctan x+C_1)\mathrm{d}x=2\int\arctan x\mathrm{d}x+\int C_1\mathrm{d}x=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

(4) $y''=y'+2x$；

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程可化为 $p'=p=2x$. 利用一阶线性微分方程的求解公式，得

$$p=e^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 2xe^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)2=e^x\left(2\int xe^{-x}\mathrm{d}x+C_1\right)=e^x(-2xe^{-x}-2e^{-x}+C_1)=-2x-2+$$

C_1e^x，对上式两边积分得原方程的通解为 $y=\displaystyle\int(-2x-2+C_1e^x)\mathrm{d}x=-x^2-2x+C_1e^x+C_2$.

(5) $xy''-y'=0$；

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程可化为 $xp'-p=0$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，将上述方程两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解得 $p=C_1'x$，对上式两边积分得原方程的通解为

$$y=C_1'\int x\mathrm{d}x=C_1x^2+C_2.$$

(6) $y''=2+(y')^2$；

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程可化为 $p'=2+p^2$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{2+p^2}=\mathrm{d}x$，将上述方程两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{2+p^2}=\int\mathrm{d}x$，解得 $p=\sqrt{2}\tan\sqrt{2}x+C_1$，对上式两边积分得原方程的通解为 $y=-\ln|\cos(\sqrt{2}x+C_1)|+C_2$.

(7) $yy''+(y')^2=0$；

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是原方程可化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，将上述方程两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，解得 $y'=p=\dfrac{C_1'}{y}$，分离变量得 $y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x$，两边积分得原方程的通解为 $y^2=C_1x+C_2$.

(8) $y''-(y')^2=0$.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程可化为 $p'-p^2=0$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\mathrm{d}x$，将上述方程两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\int\mathrm{d}x$，解得 $p=\frac{1}{-x+C_1}$，对上式两边积分得原方程的通解为 $y=-\ln|-x+C_1|+C_2$.

2. 求下列可降阶的二阶微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y''+(y')^2=1$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$；

解　令 $y'=p$，则 $y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是原方程可化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=1$，分离变量得 $\frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2}=\mathrm{d}y$，将上式两边积分得 $\int\frac{p\mathrm{d}p}{1-p^2}=\int\mathrm{d}y$，解得 $p^2=1-C_1\mathrm{e}^{-2y}$，由初始条件当 $y=0$ 时 $p=0$，得 $C_1=1$，即 $p=\pm\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}$，又分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}}=\pm\mathrm{d}x$，两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2y}}}=\pm\int\mathrm{d}x$，解得 $\ln(\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1})=\pm x+C_2$，由初始条件当 $x=0$ 时 $y=0$，得 $C_2=0$，即 $\ln(\mathrm{e}^y+\sqrt{\mathrm{e}^{2y}-1})=\pm x$，整理得 $\mathrm{e}^y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(2) $y^3y''+1=0$，$y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$.

解　原方程可写为 $y''+\frac{1}{y^3}=0$，两边乘以 $2y'$，得 $2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0$，即 $\left[(y')^2-\frac{1}{y^2}\right]'=0$，从而 $(y')^2-\frac{1}{y^2}=C_1$，由初始条件当 $y=1$ 时 $y'=0$，得 $C_1=-1$，故 $(y')^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2}$，于是 $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$，分离变量得 $\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x$，积分得 $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$，代入初始条件 $y|_{x=1}=1$，得 $C_2=\pm1$. 于是 $-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1)$，两边平方得 $x^2+y^2=2x$. 由于当 $x=1$ 时，$y=1>0$，所以原方程的特解为 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

3. 验证 $y_1=\cos3x$ 与 $y_2=\sin3x$ 都是方程 $y''+9y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解　由 $y_1=\cos3x$，得 $y_1'=-3\sin3x$，$y_1''=-9\cos3x$；

由 $y_2=\sin3x$，得 $y_2'=3\cos3x$，$y_2''=-9\sin3x$，于是有 $y_i''+9y_i=0(i=1,2)$，故 y_1 与 y_2 都是方程 $y''+9y=0$ 的解. 又因为 $\frac{y_1}{y_2}=\cot3x\neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关. 于是原方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\cos3x+C_2\sin3x$.

4. 验证 $y_1=\arcsin\mathrm{e}^x$ 与 $y_2=\arcsin2\mathrm{e}^x$ 都是方程 $y''=(y')^3+y'$ 的解，并写出该方程的通解.

解　由 $y_1=\arcsin\mathrm{e}^x$，得 $y_1'=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$，$y_1''=\frac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}$；

由 $y_2=\arcsin2\mathrm{e}^x$，得 $y_2'=\frac{2\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-4\mathrm{e}^{2x}}}$，$y_2''=\frac{2\mathrm{e}^x}{(1-4\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}$，于是有 $y_i''=(y_i')^3+y_i'(i=1,$

2)，故 y_1 与 y_2 都是方程 $y''=(y')^3+y'$ 的解. 又因为 $\frac{y_1}{y_2}\neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关，于是原方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\arcsin e^x+C_2\arcsin 2e^x$.

5. 验证：

(1) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $xy''+2y'-xy=0$ 的通解；

证明 令 $y_1=\frac{e^x}{x}$，$y_2=\frac{e^{-x}}{x}$，则 $y_1'=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x$，$y_1''=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x$，

$y_2'=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}$，$y_2''=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-x}$，且

$xy_1''+2y_1'-xy_1=x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x-x\cdot\frac{e^x}{x}=0$，

$xy_2''+2y_2'-xy_2=x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^x+2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x}-x\cdot\frac{e^{-x}}{x}=0$，故 y_1 与 y_2 均为原方程的解，且 y_1 与 y_2 线性无关，因此 $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$ 是方程 $xy''+2y'-xy=0$ 的通解.

(2) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解；

证明 令 $y_1=e^x$，$y_2=e^{2x}$，$y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$，则 $y_1''-3y_1'+2y_1=e^x-3e^x+2e^x=0$；

$y_2''-3y_2'+2y_2=4e^{2x}-6e^{2x}+2e^{2x}=0$，故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解，且 y_1 与 y_2 是线性无关的. 又因为 $(y^*)''-3(y^*)'+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-\frac{15}{12}e^{5x}+\frac{2}{12}e^{5x}=e^{5x}$，故 y^* 是原方程的一个特解，所以 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是原方程的通解.

(3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $y''+y=5e^{2x}$ 的通解；

证明 令 $y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$，$y^*=e^{2x}$，则 $y_1''+y_1=-\cos x+\cos x=0$；$y_2''+y_2=-\sin x+\sin x=0$，故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解，且 y_1 与 y_2 是线性无关的. 又因为 $(y^*)''+y^*=4e^{2x}+e^{2x}=5e^{2x}$，故 y^* 是原方程的一个特解，所以 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}$ 是原方程的通解.

(4) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+\sin 2x$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=-4x^2\sin 2x-6x\cos 2x+4\sin 2x$ 的通解.

证明 令 $y_1=x^2$，$y_2=x^2\ln x$，$y^*=\sin 2x$，则

$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=2x^2-3x\cdot 2x+4x^2=0$；

$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2(2\ln x+3)-3x(2x\ln x+x)+4x^2\ln x=0$，

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解，且 y_1 与 y_2 是线性无关的. 又因为

$x^2(y^*)''-3x(y^*)'+4y^*=-4x^2\sin 2x-6x\cos 2x+4\sin 2x$，故 y^* 是原方程的一个特解，所以 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+\sin 2x$ 是原方程的通解.

6. 求下列常系数齐次线性微分方程的通解：

(1) $y''-3y'+2y-0$；

解　特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=2$，故原方程的通解为

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

(2) $y''-2y'=0$；

解　特征方程为 $r^2-2r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=2$，故原方程的通解为

$y=C_1+C_2e^{2x}$.

(3) $y''+y=0$；

解　特征方程为 $r^2+1=0$，解得 $r_1=\mathrm{i}$，$r_2=-\mathrm{i}$，故原方程的通解为

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

(4) $y''+2y'+5y=0$；

解　特征方程为 $r^2+2r+5=0$，解得 $r_{1,2}=-1\pm2\mathrm{i}$，故原方程的通解为

$y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$.

(5) $y''-2y'+y=0$；

解　特征方程为 $r^2-2r+1=0$，解得 $r_1=r_2=1$，故原方程的通解为

$y=(C_1+C_2x)e^x$.

(6) $y^{(4)}-y=0$；

解　特征方程为 $r^4-1=0$，即 $(r^2-1)(r^2+1)=0$，解得 $r_{1,2}=\pm1$，$r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

(7) $y^{(4)}+4y''+4y=0$；

解　特征方程为 $r^4+4r^2+4=0$，即 $(r^2+2)^2=0$，解得 $r_{1,2}=\sqrt{2}\mathrm{i}$，$r_{3,4}=-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 要不 ，故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\cos\sqrt{2}x+(C_3+C_4x)\sin\sqrt{2}x$.

(8) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$；

解　特征方程为 $r^4-2r^3+r^2=0$，即 $r^2\ (r-1)^2=0$，解得 $r_{1,2}=0$，$r_{3,4}=1$，故原方程的通解为 $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$.

(9) $y^{(4)}+4y''-5y=0$；

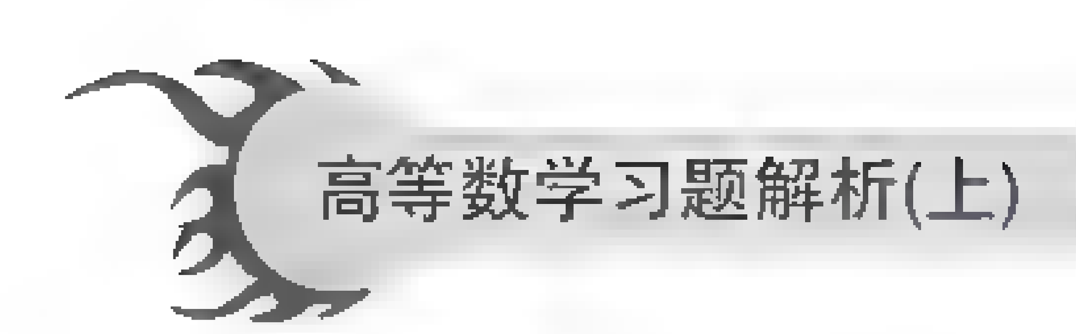
解　特征方程为 $r^4+4r^2-5=0$，即 $(r^2-1)(r^2+5)=0$，解得 $r_{1,2}=\pm1$，$r_{3,4}=\pm\sqrt{5}\mathrm{i}$，$r_{3,4}=\pm\sqrt{5}\mathrm{i}$，故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x$.

(10) $y^{(4)}+2y'''+2y''=0$.

解　特征方程为 $r^4+2r^3+2r^2=0$，即 $r^2(r^2+2r+2)=0$，解得 $r_{1,2}=0$，$r_{3,4}=-1\pm\mathrm{i}$，故原方程的通解为 $y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

7. 求下列二阶常系数非齐次线性微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y-e^{2x}$；



解　由 $r^2+r-2=0$，解得 $r_1=1$，$r_2=-2$，故原方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 因为 $f(x)=e^{2x}$，$\lambda=2$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ae^{2x}$ 是原方程的一个特解，代入原方程得 $4ae^{2x}+2ae^{2x}-2ae^{2x}=e^{2x}$，解得 $a=\frac{1}{4}$，即 $y^*=\frac{e^{2x}}{4}$.

故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{e^{2x}}{4}$.

(2) $y''+4y=e^x$；

解　由 $r^2+4=0$，解得 $r_{1,2}=\pm 2i$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. 因为 $f(x)=e^x$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ae^x$ 是原方程的一个特解，代入原方程得 $ae^x+4ae^x=e^x$，解得 $a=\frac{1}{5}$，即 $y^*=\frac{e^x}{5}$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{e^x}{5}$.

(3) $2y''+y'=3x^2-x+2$；

解　由 $2r^2+r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=-\frac{1}{2}$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}}$. 因为 $f(x)=3x^2-x+2$，$\lambda=0$ 是特征方程的单根，故设

$y^*=x(a_0x^2+a_1x+a_2)$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得

$3a_0x^2+(12a_0+2a_1)x+(4a_1+a_2)=3x^2-x+2$，比较系数得 $a_0=1$，$a_1=-\frac{13}{2}$，$a_2=28$，即 $y^*=x^3-\frac{13}{2}x^2+28x$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-\frac{1}{2}}+x^3-\frac{13}{2}x^2+28x$.

(4) $y''+4y'+3y=xe^{-x}$；

解　由 $r^2+4r+3=0$，解得 $r_1=-1$，$r_2=-3$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. 因为 $f(x)=xe^{-x}$，$\lambda=-1$ 是特征方程的单根，故可设

$y^*=xe^{-x}(ax+b)$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得

$(4ax+2a+2b)e^{-x}=xe^{-x}$，比较系数得 $a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{4}$，即 $y^*=\frac{xe^{-x}}{4}(x-1)$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{xe^{-x}}{4}(x-1)$.

(5) $y''-2y'+2y=e^x\sin x$；

解　由 $r^2-2r+2=0$，解得 $r_{1,2}=1\pm i$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. 因为 $f(x)=e^x\sin x=e^x(0\cdot\cos x+1\cdot\sin x)$，$\lambda+i\omega=1+i$ 是特征方程的单根，故可设 $y^*=xe^x(a\cos x+b\sin x)$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得 $-2a\sin x+2b\cos x=\sin x$，比较系数得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=0$，即 $y^*=-\frac{xe^x\cos x}{2}$.

故原方程的通解为 $y=Y+y^*=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{xe^x\cos x}{2}$.

(6) $y''-4y'+4y=e^{3x}(2x+1)$；

解　由 $r^2-4r+4=0$，解得 $r_{1,2}=2$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=e^{2x}(C_1+C_2x)$. 因为 $f(x)=e^{3x}(2x+1)$，$\lambda=3$ 不是特征方程的根，故可设

$y^*=e^{3x}(ax+b)$是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得 $ax+2a+b=2x+1$，比较系数得 $a=2$，$b=-3$，即 $y^*=e^{3x}(2x-3)$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(2x-3)$.

(7) $y''+3y'+2y=5x-1$；

解　由 $r^2+3r+2=0$，解得 $r_1=-1$，$r_2=-2$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. 因为 $f(x)=5x-1$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ax+b$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得 $2ax+3a+2b=5x-1$，比较系数得 $a=\frac{5}{2}$，$b=-\frac{17}{4}$，即 $y^*=\frac{5x}{2}-\frac{17}{4}$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{5x}{2}-\frac{17}{4}$.

(8) $y''+9y=x\cos2x$；

解　由 $r^2+9=0$，解得 $r_{1,2}=\pm3i$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$. 因为 $f(x)=x\cos2x$，$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根，故可设

$y^*=(ax+b)\cos2x+(cx+d)\sin2x$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得

$(5cx-4a+5d)\sin2x+(5ax+5b+4c)\cos2x=x\cos2x$，比较系数得 $a=\frac{1}{5}$，$b=0$，$c=0$，$d=-\frac{4}{25}$，即 $y^*=\frac{x\cos2x}{5}-\frac{4\sin2x}{25}$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos3x+C_2\sin3x+\frac{x\cos2x}{5}-\frac{4\sin2x}{25}$.

(9) $y''+2y=e^x+\sin x$；

解　由 $r^2+2=0$，解得 $r_{1,2}=\pm\sqrt{2}i$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$. 因为 $f(x)=e^x+\sin x$，对应于方程 $y''+2y=e^x$，可设特解 $y_1{}^*=Ae^x$；对应于方程 $y''+2y=\sin x$，可设特解 $y_2{}^*=B\cos x+C\sin x$，由叠加原理，设 $y^*=Ae^x+B\cos x+C\sin x$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得

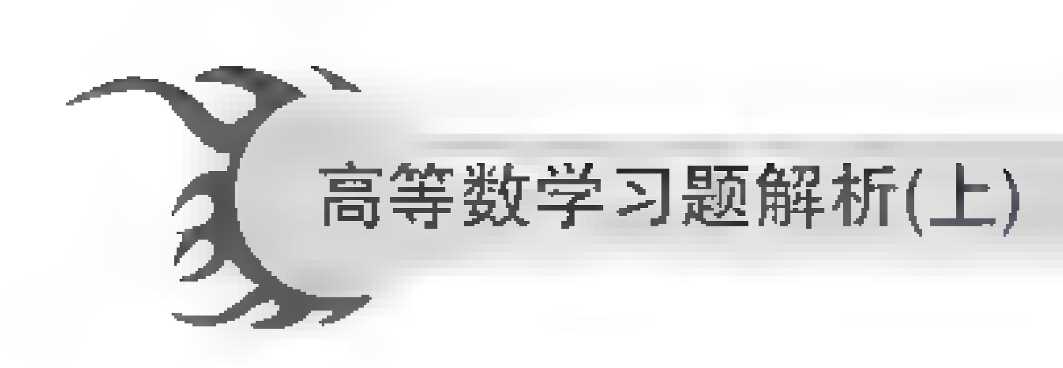
$3Ae^x+B\cos x+C\sin x=e^x+\sin x$，比较系数得 $A=\frac{1}{3}$，$B=0$，$C=1$，即

$y^*=\frac{e^x}{3}+\sin x$. 故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+\frac{e^x}{3}+\sin x$.

(10) $y''-y=\cos^2x$.

解　由 $r^2-1=0$，解得 $r_{1,2}=\pm1$，故原方程对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 因为 $f(x)=\cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{\cos2x}{2}$，对应于方程 $y''-y=\frac{1}{2}$，可设特解



$y_1^* = A$；对应于方程 $y'' - y = \frac{\cos 2x}{2}$，可设特解 $y_2^* = B\cos 2x + C\sin 2x$，由叠加原理，设 $y^* = A + B\cos 2x + C\sin 2x$ 是原方程的一个特解，代入原方程并整理，得 $-A - 5B\cos 2x - 5C\sin 2x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$，比较系数得 $A = -\frac{1}{2}$，$B = -\frac{1}{10}$，$C = 0$，即 $y^* = -\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{10}$. 故原方程的通解为 $y = Y + y^* = Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{10}$.

6.4　总习题解答

1. 填空题

(1) $x^4y'''+x^2(y')^2+4xy^4=\sin x$ 是________阶微分方程；

(2) 一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为________；

(3) 已知 $y=x$，$y=x^3$ 是某二阶齐次线性微分方程的两个解，则该方程的通解为______；

(4) 已知 $y=x$，$y=\sin x$，$y=1$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为________.

解　(1) 3.

(2) $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C\right]$.

(3) $y=C_1x+C_2x^3$.

(4) $y=C_1(x-1)+C_2(\sin x-1)+1$.

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程：

(1) $(x+C)^2+2y^2=3$(其中 C 为任意常数)；

解　将 $(x+C)^2+2y^2=3$ 两边关于 x 求导，得 $2(x+C)+4y\cdot y'=0$，从而有 $C=-2y\cdot y'-x$，将其代入 $(x+C)^2+2y^2=3$ 中，得 $2y^2[2(y')^2+1]=3$.

(2) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$(其中 C_1，C_2 为任意常数)；

解　将 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ 两边关于 x 求一阶与二阶导数，得 $y'=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}$，$y''=C_1e^{-x}+9C_2e^{3x}$，将上面两个方程联立，得 $C_1=-\frac{1}{4}(3y'-y'')e^x$，$C_2=\frac{1}{12}(y'+y'')e^{-3x}$，将其代入 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ 中，整理得 $y''-2y'-3y=0$.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $(y^2-1)dx+(x^2-4x)dy=0$；

解　分离变量，得 $\frac{dy}{y^2-1}=\frac{dx}{4x-x^2}$，两端积分 $\int\frac{dy}{y^2-1}=\int\frac{dx}{4x-x^2}$，即

$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)dx$，解得

$\frac{1}{2}(\ln|y-1|-\ln|y+1|)=\frac{1}{4}(\ln|x|-\ln|4-x|)+\ln C_1(C_1>0)$，整理得

$\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2\left|\frac{4-x}{x}\right|=\ln C_1^4$，从而 $(y-1)^2(4-x)=\pm C_1^4x(y+1)^2$，令 $C=\pm C_1^4$，原方程的通解为 $(y-1)^2(4-x)=Cx(y+1)^2$.

(2) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0$.

解 原方程可写成$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1+2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}-1}=0$，令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=xu$，有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则原方程成为$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1+2u-u^2}{u^2+2u-1}=0$，整理并分离变量，得$\dfrac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两端积分$\displaystyle\int\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，整理得$\displaystyle\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，解得

$\ln\dfrac{|u+1|}{u^2+1}=\ln|x|+\ln C$，从而$\dfrac{u+1}{u^2+1}=Cx$. 将$u=\dfrac{y}{x}$代入上式并整理，原方程的通解为$\dfrac{y+x}{y^2+x^2}=C$.

(3) $(y^3+x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$；

解 原方程可写成$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y}=-y^2$，则其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(-\int y^2\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y}\left(-\int y^3\mathrm{d}y+C\right)=-\frac{y^3}{4}+\frac{C}{y}.$$

(4) $x\mathrm{d}y+[y+3xy^3(1+\ln x)]\mathrm{d}x=0$；

解 原方程可写成$\dfrac{1}{y^3}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y^2}=-3(1+\ln x)$，令$z=\dfrac{1}{y^2}$，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2}{y^3}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，于是原方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2z}{x}=6(1+\ln x)$，其通解为$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[6\int(1+\ln x)\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$，解得$z=-12x-6x\ln x+Cx^2$. 将$z=\dfrac{1}{y^2}$代入上式并整理，原方程的通解为$y^{-2}=-12x-6x\ln x+Cx^2$.

(5) $(x^2+2y)\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y=0$；

解 这里$P(x,y)=x^2+2y$，$Q(x,y)=2x$. 因为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程是全微分方程，其通解为$\displaystyle\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y 2x\mathrm{d}y=C$，即$\dfrac{x^3}{3}+2xy=C$.

(6) $2y\mathrm{d}x-3xy^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

解 方程两边同时乘以x，得$2xy\mathrm{d}x-3x^2y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$，即

$y\mathrm{d}(x^2)-3x^2y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$，两边再除以$y^2$得$\dfrac{y\mathrm{d}(x^2)-x^2\mathrm{d}y}{y^2}-3x^2\mathrm{d}x=0$，即$\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{y}-x^3\right)=0$，所以$\dfrac{x}{y^2}$为原方程的一个积分因子，且原方程的通解为$\dfrac{x^2}{y}-x^3=C$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\sin y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\cos y\mathrm{d}y=0$，$y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$；

解　分离变量，得$\frac{e^x}{e^x+1}dx=\frac{\cos y}{\sin y}dy$，两边积分$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{\cos y}{\sin y}dy$，解得

$\ln(e^x+1)=\ln|\sin y|+\ln C_1(C_1>0)$，即$e^x+1=C\sin y$，代入初始条件$x=0$，$y=\frac{\pi}{4}$，得$C=2\sqrt{2}$. 于是$e^x+1=2\sqrt{2}\sin y$，即$(e^x+1)\csc y=2\sqrt{2}$为已知微分方程满足所给初始条件的特解 .

(2) $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$，$y|_{x=0}=1$；

解　原方程可以写为$(1+e^{\frac{x}{y}})\frac{dx}{dy}+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)=0$，令$u=\frac{x}{y}$，即$x=yu$，从而

$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，则原方程化为$(1+e^u)\left(u+y\frac{du}{dy}\right)+e^u(1-u)=0$，整理并分离变量得

$\frac{1+e^u}{u+e^u}du=-\frac{1}{y}dy$，两边积分$\int\frac{1+e^u}{u+e^u}du=-\int\frac{1}{y}dy$，解得$u+e^u=\frac{C}{y}$，将$u=\frac{x}{y}$代入得$x+ye^{\frac{x}{y}}=C$，代入初始条件$x=0$，$y=1$，得$C=1$. 于是$x+ye^{\frac{x}{y}}=1$为已知微分方程满足所给初始条件的特解 .

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x}$，$y|_{x=\pi}=0$；

解　$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\cos x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int\frac{\cos x}{x}\cdot xdx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\int\cos xdx+C\right)=\frac{\sin x+C}{x}$，

代入初始条件$x=\pi$，$y=0$，得$C=0$. 于是$y=\frac{\sin x}{x}$为已知微分方程满足所给初始条件的特解.

(4) $y''+(y')^2=1$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$；

解　令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，于是原方程变为$p\frac{dp}{dy}+p^2=1$. 分离变量，得

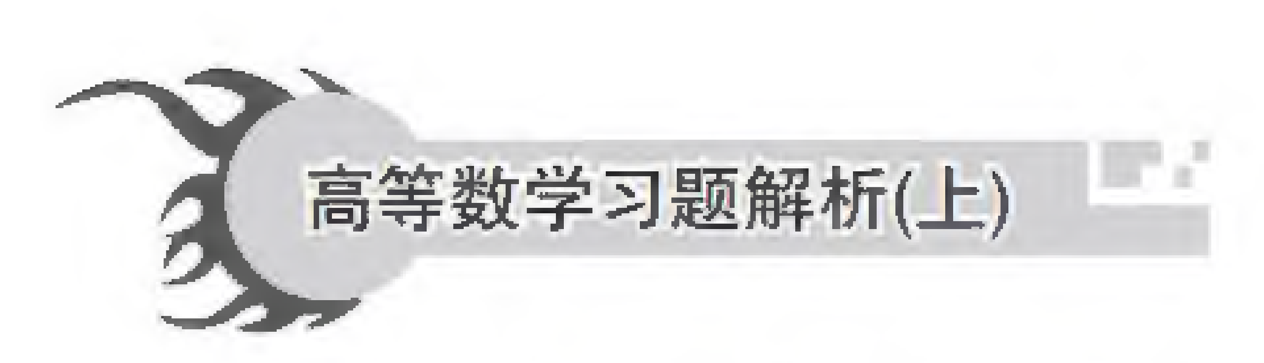
$\frac{pdp}{1-p^2}=dy$. 两边积分$\int\frac{pdp}{1-p^2}=\int dy$，解得$p^2=1-C_1e^{-2y}$. 由初始条件$y=0$，$p=0$，得$C_1=1$. 于是$p^2=1-e^{-2y}$，即$p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$，再分离变量，得$\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx$，两边积分$\int\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm\int dx$，整理并凑微分，得$\int\frac{d(e^y)}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm\int dx$，解得

$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x+C_2$，由初始条件$x=0$，$y=0$，得$C_2=0$，故$\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x$，即$y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$为已知微分方程满足所给初始条件的特解 .

(5) $y''+5y'+18y=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$；

解　解特征方程$r^2+4r+7=0$，得$r_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}i$，故方程的通解为

$y=e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$，由初始条件$x=0$时，$y=0$，得$C_1=0$.



$y'=e^{-2x}[(\sqrt{3}C_2-2C_1)\cos\sqrt{3}x-(\sqrt{3}C_1+2C_2)\sin\sqrt{3}x]$，由初始条件 $x=0$ 时，$y'=3$，得 $C_2=\sqrt{3}$，故原方程满足初始条件的特解为 $y=\sqrt{3}e^{-2x}\sin\sqrt{3}x$.

(6) $y''-2y'+3y=4$，$y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=3$；

解 解特征方程 $r^2-2r+3=0$，得 $r_1=-1$，$r_2=3$，故对应的齐次方程的通解为

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. 因为 $f(x)=4$，$\lambda=0$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=A$ 是原方程的一个特解，代入方程解得 $A=\frac{4}{3}$，所以原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\frac{4}{3}$. 由初始条件 $x=0$时，$y=2$，得 $C_1+C_2=\frac{2}{3}$. $y'=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}$，由初始条件 $x=0$ 时，$y'=3$，得 $-C_1+3C_2=3$，从而 $C_1=-\frac{1}{4}$，$C_2=\frac{11}{12}$，故原方程满足初始条件的特解为 $y=-\frac{e^{-x}}{4}+\frac{11e^{3x}}{12}+\frac{4}{3}$.

(7) $y''-y=4xe^x$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=5$.

解 解特征方程 $r^2-1=0$，得 $r_{1,2}=\pm1$，故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^x$. 因为 $f(x)=4xe^x$，$\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设 $y^*=xe^x(ax+b)$是原方程的一个特解，代入方程解得 $4Ax+2A+2B=4x$，比较系数得 $A=1$，$B=-1$，故

$y^*=xe^x(x-1)$，于是原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x(x-1)$. 由初始条件 $x=0$ 时，$y=1$，得 $C_1+C_2=1$. $y'=e^x(x^2+x-1+C_1)-C_2e^{-x}$，由初始条件 $x=0$ 时，$y'=5$，得 $C_1-C_2=6$，从而 $C_1=\frac{7}{2}$，$C_2=-\frac{5}{2}$，故原方程满足初始条件的特解为 $y=\frac{7e^{-x}}{2}-\frac{5e^x}{2}+xe^x(x-1)$.